Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 6

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Wiederholungsaufgaben und Grundlagen (15 P)

a) Vollziehen Sie anhand der VL nach, wie aus den Vollständigkeits- und Orthogonalitätsrelationen für $|p\rangle$ und $|x\rangle$ zusammen mit dem Postulat $\langle x|p\rangle \propto e^{ipx/\hbar}$ die Heisenberg-Vertauschungsrelation $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass die Differentialoperatoren $\hat{P} = P$ und $\hat{X} = i\hbar\frac{\partial}{\partial P}$ die Vertauschungsrelation erfüllen. Demonstrieren Sie, dass diese Darstellung über die Fourier-Transformation mit der herkömmlichen Ortsraum-Darstellung zusammenhängt. Leiten Sie, ausgehend vom klassischen Ausdruck für die Energie eines freien Teilchens, die zeitunabhängige Schrödingergleichung in Orts- und Impulsraum her. Finden Sie die allgemeine Lösung für beide.

c) Überprüfen Sie, dass die Zeitentwicklung gemäß der Schrödiger-Gleichung einer unitären Zeitentwicklung des Zustandsvektors entspricht bzw. die Normierung der Wellenfunktion erhält. Was ist die physikalische Interpretation?

d) Zeigen Sie im Schrödinger-Bild und im Heisenberg-Bild, dass der Erwartungswert einer Observablen zeitlich konstant ist, wenn diese mit dem Hamilton-Operator vertauscht.

e) Leiten Sie aus der zeitabhängigen die zeit*un*abhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen in einer Dimension her (im Ortsraum). Demonstrieren Sie, dass für den Fall einer endlichen (nicht notwendigerweise stetigen) Potentialfunktion $V(x)$ die Lösungen $\psi(x)$ differenzierbar sind. Was ändert sich, wenn man die Dirac'sche Delta-Distribution als Potential zulässt?

Aufgabe 2 Dreidimensionaler Harmonischer Oszillator und Drehimpulse (15 P)

Der Hamilton-Operator des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators (HO) lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{P}}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\vec{X}}^2 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte $\vec{p} = \langle\hat{\vec{P}}\rangle$ und $\vec{x} = \langle\hat{\vec{X}}\rangle$ die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\hat{L}_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\hat{X}_j\hat{P}_k$$

mit $\hat{H}$ vertauschen. Welcher Symmetrie des Hamilton-Operators und welcher Erhaltungsgröße entsprechen sie?

c) Argumentieren Sie, dass $\hat{H}$ als Summe dreier identischer eindimensionaler HOs aufgefasst werden kann, die nicht miteinander gekoppelt sind.

d) Konstruieren Sie in Analogie zum eindimensionalen Fall die Leiteroperatoren $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger, a_z, a_z^\dagger$ aus $\hat{\vec{P}}$ und $\hat{\vec{X}}$ mit der Eigenschaft $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Drücken Sie $\hat{H}$ durch $a_i, a_i^\dagger$ aus.

e) Was sind die Eigenwerte von $\hat{H}$ (insb. die Energie des Grundzustands) und was ist der Entartungsgrad der Energieniveaus? *Hinweis:* Wieviele unabhängige Komponenten hat $a_{i_1}^\dagger \dots a_{i_n}^\dagger |0\rangle$?

f) Drücken Sie $\hat{L}_i$ durch $a_j, a_k^\dagger$ aus. Zeigen Sie, dass für den Grundzustand $|0\rangle$ von $\hat{H}$ gilt dass $\hat{L}_i|0\rangle = 0$. Welcher Eigenschaft der Wellenfuktion entspricht dies?

g) Schreibt man den Hamilton-Operator des *eindimensionalen* HO mit Leiteroperatoren, sieht man, dass er eine kontinuierliche Symmetrie

$$a \longrightarrow e^{i\phi} a$$

für $\phi \in \mathbb{R}$ aufweist. Drücken Sie $\hat{X}$ und $\hat{P}$ durch die Leiteroperatoren aus und berechnen Sie die resultierende Transformationsvorschrift für $\hat{X}$ und $\hat{P}$. Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen unverändert bleiben. Zeigen Sie weiter, dass diese Symmetrietransformation vom Hamilton-Operator selbst erzeugt wird und somit keiner neuen Erhaltungsgröße jenseits der Energie entspricht.

h) Zurück zum dreidimensionalen Fall: fassen Sie a_x, a_y, a_z als dreikomponentigen Vektor auf und zeigen Sie, dass $\hat{H}$ eine $U(3)$-Symmetrie

$$\vec{a} \longrightarrow e^{A} \vec{a}$$

aufweist, wobei A eine beliebige antihermitesche 3×3-Matrix ist. Wie viele Erhaltungsgrößen folgen aus dieser Symmetrie? Ermitteln Sie dazu die Anzahl der unabhängigen Parameter der Transformation, wobei Real- und Imaginärteile getrennt zählen. Um welche Erhaltungsgrößen handelt es sich? *Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Erhaltungsgrößen der Bahnen im klassischen Fall [1].

Literatur

[1] D.M. Fradkin, http://dx.doi.org/10.1119/1.1971373