Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 8

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Parität (5+5+5 P)

a) Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator $\mathcal{P}$ auf Kugelkoordinaten wie folgt wirkt:

$$r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \phi \to \phi \pm \pi\,.$$

b) Die Legendre-Polynome P_n kann man implizit definieren über den Zusammenhang

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)\,.$$

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$.

Aufgabe 2 Die Orbitale p_x,p_y,p_z (5+5+5 P)

Die Kugelflächenfunktionen Y_l^m sind Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators bezüglich einer bestimmten Quantisierungsachse, üblicherweise von L_z. Wir wollen den Fall $l = 1$ betrachten (die sog. p-Orbitale). Oft wird hier statt Y_1^{-1}, Y_1^0, Y_1^1 eine Basis benutzt, deren drei Elemente jeweils Eigenfunktionen von L_x, L_y und L_z sind: die sogenannten p_x, p_y und p_z-Orbitale. Diese wollen wir konstruieren.

a) Wählt man eine Darstellung der Drehimpulsoperatoren auf den Funktionen von θ, ϕ, so gilt

$$L_\pm Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_l^{m\pm 1}(\theta, \phi)\,.$$

Berechnen Sie damit die Wirkung von L_x und L_y auf $Y_1^{-1} \dots Y_1^1$.

b) Konstruieren Sie anhand dieser Ergebnisse aus Linearkombinationen von $Y_1^{-1} \dots Y_1^1$ jeweils drei Eigenfunktionen von L_x und L_y zu den Eigenwerten $-\hbar, 0, \hbar$.

c) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände von L_x, L_y und L_z zum Eigenwert 0 eine vollständige Basis des von $Y_1^{-1} \dots Y_1^1$ aufgespannten dreidimensionalen Funktionenraums bilden, und die Wellenfunktionen rein reell gewählt werden können. Ist diese Basis orthogonal?

Hinweis: Sie können zu Beginn die drei Basisfunktionen als Basis eines dreidimensionalen Vektorraums über $\mathbb{C}$ auffassen und b) und c) in der Sprache dreikomponentiger Vektoren bzw. 3×3 Matrizen rechnen. Sehen Sie Parallelen zu Aufgabe 2) des letzten Übungsblatts?