

Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12

Blatt 9

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Wellenpakete (10 P)

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch

$$\psi(x, 0) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right). \quad (1)$$

Betrachten Sie den Ansatz

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\alpha(t)x^2 - \gamma(t)\right), \quad (2)$$

setzen Sie ihn in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ein und leiten Sie Differentialgleichungen für α und γ her. Bestimmen Sie aus (1) die Anfangsbedingungen und finden Sie die Lösungen.

Aufgabe 2 Wellenpakete und Stromdichte (2+5+3 P)

Betrachten Sie wiederum ein freies Teilchen in einer Dimension, nun aber als Gauß'sches Wellenpaket mit Schwerpunktsimpuls

$$\psi(x, 0) = N \exp\left(ik_0x - \frac{x^2}{2a^2}\right). \quad (3)$$

- Berechnen Sie N .
- Berechnen Sie den Strom $j(x, t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.
- Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} j(x, 0) dx$.

Aufgabe 3 Zerlaufen von Wellenpaketen im Heisenberg-Bild (3+2+3+2 P)

Wir betrachten ein freies Teilchen in einer Dimension.

a) Zeigen Sie anhand der Heisenberg-Gleichung, dass

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle_t = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle_t = 0, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{X}^2\rangle_t = \frac{1}{m}\langle\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\rangle_t, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\rangle_t = \frac{2}{m}\langle\hat{P}^2\rangle_t. \quad (4)$$

b) Zeigen Sie anhand dieser Ergebnisse dass

$$\langle\hat{X}\rangle_t = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle_0 t, \quad \langle\hat{X}^2\rangle_t = \langle\hat{X}^2\rangle_0 + \frac{1}{m}\langle\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\rangle_0 t + \frac{1}{m^2}\langle\hat{P}^2\rangle_0 t^2. \quad (5)$$

c) Zeigen Sie schließlich, dass

$$\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle_t = \langle(\Delta\hat{X})^2\rangle_0 + \frac{1}{m^2}\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle_0 t^2 + \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}\langle\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}\rangle_0 - \langle\hat{X}\rangle_0\langle\hat{P}\rangle_0\right) t \quad (6)$$

- Angenommen, das anfängliche Wellenpaket minimiere die Heisenberg-Unschärferelation, $\Delta X \Delta P = \hbar/2$, und weise keine Korrelation zwischen X und P auf. Zeigen Sie, dass das Wellenpaket sich mit der Zeit verbreitert ("zerläuft"). Kann unter anderen Voraussetzungen auch die Situation auftreten, dass das Wellenpaket anfänglich schmaler wird?