9 Anhang

9.1 Maßtheorie

Zunächst einiges aus der Maß–Theorie.

Definition 9.1.1 *Sei* $\Omega \neq 0$ *und* $\mathcal{A} \subset \text{POT}(\Omega)$. *Dann*

i.) $\mathcal{A}$ *heißt* **vereinigungsstabil***:* $\forall A, B \in \mathcal{A}$*:* $A \cup B \in \mathcal{A}$

ii.) $\mathcal{A}$ *heißt* **Ring über** Ω*:*

1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2.) $\mathcal{A}$ *vereinigungsstabil*

3.) $A, B \in \mathcal{A}$*:* $A - B \in \mathcal{A}$

iii.) $\mathcal{A}$ *heißt* **Algebra über** Ω*:*

1.) $\Omega \in \mathcal{A}$

2.) $\mathcal{A}$ *vereinigungsstabil*

3.) $\forall A \in \mathcal{A}$*:* $\bar{A} \in \mathcal{A}$

iv.) $\mathcal{A}$ *heißt* σ**-Algebra über** Ω*:*

1.) $\Omega \in \mathcal{A}$

2.) $\forall A \in \mathcal{A}$*:* $\bar{A} \in \mathcal{A}$

3.) $\forall (A_n)_{n\in\mathbf{N}}, A_n \in \mathcal{A}$*:* $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Die kleinste σ-Algebra über Ω ist: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$. $\mathcal{A} = \text{POT}(\Omega)$ ist die größte σ-Algebra über Ω.
Sei mit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ der Abschluss von $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Definition 9.1.2 *Sei* $\mathcal{A}$ *ein Ring über* Ω *und* μ*:* $\mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$

1. *μ heißt* **positiv***:*
   $\mu(\emptyset) = 0$ *und* $\forall \in \mathcal{A}$*:* $\mu(A) \geq 0$

2. *μ heißt* **additiv***:*
   $\forall, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$*:* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

3. *μ heißt* σ**-additiv***:*
   $\forall \left(A_n\right)_{n \in \mathbf{N}}, A_n \in \mathcal{A}, \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$
   $\forall n, m \in \mathbf{N}, n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$*:*
   $\mu\left(\left(A_n\right)_{n \in \mathbf{N}}\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu(A_n)$

4. *μ heißt* **Prämaß***:*
   μ positiv und σ-additiv

5. *μ heißt* **Maß***:*
   μ ist Prämaß und A ist eine σ-Algebra

6. *μ heißt* **Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß)***:*
   μ ist Maß und $\mu(\Omega) = 1$

Sei A eine σ-Algebra über Ω und $\omega \in \Omega$. Die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ sei durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega \notin A \\ 1 & \text{falls } \omega \in A \end{cases}$$

μ ist ein W-Maß und heißt **Dirac-Maß**.
In einer laxen Schreibweise ist

$$e^{-\mathcal{H}(x)/k_B T} dx$$

das **Gibbs-Maß**.
Ein weiteres Maß, an dem wir interessiert sind, ist das **mikrokanonische** Maß

$$\delta\left(\mathcal{H}(x) - E\right) dx \quad .$$

Definition 9.1.3

i.) *Ein Paar* $(\Omega, \mathcal{A})$ *heißt* **Messraum***:*
   $\Omega \neq 0$ *und $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über Ω.*

ii.) *Das Tripel* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *heißt* **Maßraum***:*
   $(\Omega, \mathcal{A})$ *Meßraum und* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *ein Maß.*

Definition 9.1.4 *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und f eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$.*

1. *f heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-**messbar**:*
   $\forall' \in \mathcal{A}'$: $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$

2. *Sei f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und $\mu' : \mathcal{A}' \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert durch $\mu'(A') = \mu(f^{-1}(A'))$, $\forall' \in \mathcal{A}'$, dann heißt μ' das **Bild von μ bzgl.** f ($\mu' = f(\mu)$)*

Definition 9.1.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Maßraum und $X : \Omega \to \Omega'$.*

(i) *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **W-Raum** $\Leftrightarrow$ μ ist ein W-Maß.*

(ii) *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein W-Raum und X $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ messbar, dann heißt X $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbare **stochastische Variable**.*

(iii) *Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und X $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbare stochastische Variable, dann heißt das Bild von μ bzgl. X die **Verteilung der stochastischen Variablen** X.*

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und wählt man als Abbildung $X : \Omega \to \Omega$ die Identität, dann ist das Bild von μ bzgl. X wieder μ. Damit kann *jedes W-Maß μ als Verteilung einer stochastischen Variablen aufgefasst werden!*

Definition 9.1.6 *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Laplacescher W-Raum**: $\Leftrightarrow$*

1. $|\Omega| = n \in \mathbf{N}$

2. $\mathcal{A} = POT(\Omega)$

3. $\forall \omega \in \Omega$: $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$.

9.2 Gesetz der großen Zahlen

Im Folgenden sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ als W-Raum vorausgesetzt.

Definition 9.2.1 *Seien X, Y stochastische Variable.*

1. *$\langle X \rangle = \int_\Omega X d\mu$ heißt **Erwartungswert von** X.*

2. *Sei $n \in \mathbb{N}, n > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. $\langle (X-\alpha)^n \rangle$ heißt n-**tes Moment von** X **bzgl.** α. $\langle X^n \rangle$ heißt n-**tes Moment von** X.*

3. *Sei* $\langle X \rangle$ *endl.* $\tau := \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle$ *heißt die* **Varianz** *von* X.

4. *Sei* $\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle XY \rangle$ *endl. cov* $[X, Y] := \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle$ *heißt* **Kovarianz** *von* X *und* Y.

5. X *und* Y *heißen* **unkorreliert**, *wenn cov*$[X, Y] = 0$.

6. $\rho(X, Y) = cov[X, Y]/\sqrt{\sigma(x)\sigma(y)}$ *heißt* **Korrelationskoeffizient**, *falls* $0 < \sigma(x), \sigma(y) < \infty$.

7. $L_\alpha(\mu) := \{X | \langle |X|^\alpha \rangle < \infty\}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$ *(Menge der über* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *definierten reellwertigen stochastischen Variablen mit endlichem Moment)*

Wir müssen uns nun mit der Konvergenz von Folgen stochastischer Variablen befassen.

Definition 9.2.2 *Sei* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge stochastischer Variablen.*

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** X $(X_n \to X)_{n \to \infty}$
gdw *für alle* $\omega \in \Omega$ *:* $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

2. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert mit Wahrscheinlichkeit** 1 **gegen** X $(X_n \to X)_{n \to \infty}$
gdw $\exists N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0,$ *für alle* $\omega \in \bar{N}$ *:* $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

3. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** μ**-stochstisch gegen X** $(X_n \stackrel{\mu}{\to} X)_{n \to \infty}$
gdw *für alle* $\epsilon \in \Re, \epsilon > 0$ *:* $\lim_{n \to \infty} \mu(\{\omega \in \Omega | |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon) = 0$

4. X *und* $X_n, n \in N \in L_\alpha(\mu)$
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert im** α**-ten Mittel gegen** X $(X_n \stackrel{\alpha}{\to} X)_{n \to \infty}$
gdw $\lim_{n \to \infty} (|X_n - X|^\alpha)^{1/\alpha} = 0$

Bemerkungen:

1. $\alpha = 1$ bedeutet Konvergenz im Mittel.
$\alpha = 2$ bedeutet Konvergenz im quadratischen Mittel.

2. Falls $(X_n \to X)_{n \to \infty}$ und $(X_n \stackrel{\alpha}{\to} X)_{n \to \infty}$, folgt $(X_n \stackrel{\mu}{\to} X)_{n \to \infty}$.

3. $< |X_n - X|^\alpha >^{1/\alpha}$ definiert eine Norm auf dem Raum $L_\alpha(\mu)$.

Definition 9.2.3 *Sei* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge stochastischer Variablen mit* $X_n \in L_1(\mu)$.

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *genügt dem* **schwachen Gesetz der großen Zahlen**
gdw $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - < X_i >) \stackrel{\mu}{\to} 0$ *für* $n \to \infty$

2. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *genügt dem* **starken Gesetz der großen Zahlen**
gdw $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - < X_i >) \to O(\mu)$ *für* $n \to \infty$

9.3 Verallgemeinerte homogene Funktionen

Im Folgenden wollen wir Eigenschaften homogener und verallgemeinerter homogener Funktionen betrachten.

Definition 9.3.1 *Eine Funktion $f(r)$ heißt* **homogen**, *falls eine Funktion $g(r)$ existiert, so dass*

$$om\, \lambda \in I\!R: \ f(\lambda r) = g(\lambda) f(r).$$

Beispiel 9.3.1
Ein einfaches Beispiel ist die Funktion

$$f(r) = Ar^2 \qquad .$$

Sie ist eine homogene Funktion mit $g(\lambda) = \lambda^2$.

Wir wollen klären, wie $g(\lambda)$ aussieht. Es gilt

$$f(\lambda \mu r)) = g(\lambda) f(\mu r) = g(\lambda) g(\mu) f(r),$$

andererseits

$$f((\lambda\mu) r) = g(\lambda\mu) f(r)$$

$$\Rightarrow \qquad g(\lambda\mu) = g(\lambda) g(\mu)$$

Nehmen wir an, g sei differenzierbar, dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\lambda\mu) = \lambda g'(\lambda\mu) = g(\lambda) g'(\mu) \qquad .$$

Wähle $\mu = 1$ und definiere $g'(\mu = 1) =: p$
Dann

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\lambda) = \lambda g'(\lambda) = g(\lambda) p \tag{9.1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{d}{d\lambda}[\log\, g(\lambda)] = \frac{f}{\lambda} \tag{9.2}$$

$$\Rightarrow \qquad \log\, g(\lambda) = p\, \log \lambda + c \tag{9.3}$$

$$\Rightarrow \qquad g(\lambda) = e^c \lambda^p \tag{9.4}$$

$$\Rightarrow \qquad g'(\lambda) = p\, e^c \lambda^{p-1} \tag{9.5}$$

wegen $g'(1) = p$ folgt $p = p\, e^c (1)^{p-1}$. Wähle $c = 0$, dann

$$g(\lambda) = \lambda^p \qquad . \tag{9.6}$$

Definition 9.3.2 *p heißt der* **Grad der Homogenität**.

Wir wollen dies nun verallgemeinern.

Definition 9.3.3 *Sei $\mathbf{x} \in I\!R^n$ und $f(\mathbf{x})$ eine Funktion. Falls eine Funktion $g(.)$ existiert, so dass*

$$om\ \lambda \in I\!R: \; f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = g(\lambda) f(x_1, \ldots, x_n),$$

dann heißt $f(\mathbf{x})$ **homogen**.

Wir beschränken uns im Folgenden auf homogene Funktionen mit zwei Argumenten

$$f(\lambda x,\, \lambda y) = \lambda^p\, f(x, y) \qquad . \tag{9.7}$$

Aus physikalischen Gründen können wir annehmen, dass weder x noch y je Null werden

$$f\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right) = |x|^{-p} f(x, y) \qquad . \tag{9.8}$$

Die linke Seite ist nur noch formal eine Funktion zweier Parameter und wir definieren

$$F_1^{\pm}(z) := f(\pm 1, z) \qquad , \tag{9.9}$$

dann erhalten wir

$$f(x, y) = |x|^p\, F_1^{\pm}\left(\frac{y}{|x|}\right) \qquad , \tag{9.10}$$

d.h., f hängt von y nur durch das Verhältnis $y/|x|$ ab. Wenn $f(x, y) = |x|^p F\left(\frac{y}{|x|}\right)$, dann ist f eine homogene Funktion.
Diese Charakterisierung hat eine wichtige Konsequenz: Findet man eine Abhängigkeit

$$f(x, y) = |x|^p F\left(\frac{y}{|x|}\right) \qquad , \tag{9.11}$$

dann ist f homogen für eine beliebige Funktion F.
Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die Skalenplots. Bei diesen trägt man auf der Abszisse $y/|x|$ und auf der Ordinate $f(x, y) \cdot |x|^{-p}$ auf.
Natürlich gilt das Obige ebenso für die y-Variable.

Siehe dazu auch die **Eulersche Relation**

$$xf_x + yf_y = \lambda f(x,y) \qquad . \tag{9.12}$$

Satz 9.3.1 *Wenn $f(x,y)$ auf einer geschlossenen Kurve um den Ursprung bekannt ist, dann ist f überall festgelegt und der Grad der Homogenität ist bekannt.*

Beweis:
Sei C eine solche Kurve. Es gilt $\frac{x}{x_c} = \frac{y}{y_c}$ entlang der Geraden G. Definiere

$$f(x,y) := f(\lambda x_c,\, \lambda y_c) = \lambda^p f(x_c, y_c).$$

Definition 9.3.4 *Eine Funktion $f(x,y)$ heißt* **verallgemeinerte homogene Funktion***, falls es $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$f(\lambda^{a_1} x,\, \lambda^{a_2} y) = \lambda f(x,y).$$

a_1 und a_2 heißen die **Skalenexponenten**.

Beispiel 9.3.2

$$f(x,y) = yx^2 + x^4$$

(**Helmholtz-Freie-Energie**) in der Nähe des kritischen Punktes, (Landau-Theorie)

$$(a_1, a_2) = (1/2, 1/4)$$

Satz 9.3.2 *Wenn $f(x_1,x_2)$ eine verallgemeinerte homogene Funktion mit Skalenexponent a_f ist, dann ist die partielle Ableitung*

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial x_1^j \partial x_2^k} f$$

eine verallgemeinerte homogene Funktion mit Skalenexponent $(a_f - ja_1 - ka_2)$.

Beweis:
trivial

Satz 9.3.3 *Wenn $f(x_1,x_2)$ eine verallgemeinerte homogene Funktion mit Skalenexponent a_p ist, dann ist die Legendre-Transformation*

$$\tilde{f}(\tilde{x}_1, x_2) := f(x_1, x_2) - x_1 \tilde{x}_1$$

eine verallgemeinerte homogene Funktion mit dem Skalenexponenten a_f. Der Skalenexponent der transformierten Variablen ist $\tilde{a}_1 = a_f - a_1$.