

10. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 4.7.08 in den Übungen

Aufgabe 10.1 (*Bose-Gas*)

(10 Punkte)

Die großkanonische Zustandssumme eines idealen Gases aus Bosonen lässt sich folgendermaßen schreiben (vergleiche mit den in der Vorlesung hergeleiteten Ausdrücken)

$$\ln Z_{grk} = - \sum_{\nu} \ln \left(1 - e^{-\beta(E_{\nu}-\mu)} \right) \quad (1)$$

(a) Berechne

$$\langle N \rangle = \sum_{\nu} \langle n_{\nu} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{grk}$$

und lese aus dem Ergebnis die mittleren Besetzungszahlen $\langle n_{\nu} \rangle$ der Zustände ab. (3 Punkte)

(b) Berechne die Entropie

$$S = k \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \ln Z_{grk}$$

des Bose-Gases. Leite einen Ausdruck für S her, in dem nur die mittleren Besetzungszahlen $\langle n_{\nu} \rangle$ vorkommen. (5 Punkte)

(c) Was ergibt sich für die Entropie S im klassischen Grenzfall $\langle n_{\nu} \rangle \ll 1$? (2 Punkte)

Aufgabe 10.2 (*Verdünntes ideales Gas, klassischer Grenzfall*)

(10 Punkte)

(a) Berechne $\ln(Z_{grk})$ (siehe Gl. (1)) für das Bose-Gas in einem Würfel der Kantenlänge L im thermodynamischen Grenzfall für $\mu < 0$ und $e^{-\beta(E_{\nu}-\mu)} \ll 1$. Ersetze dazu die Summe über die Zustände durch ein Integral und entwickle den Logarithmus. Vergleiche mit dem klassischen Ergebnis aus Aufgabe 5.1. (6 Punkte)

(b) Berechne mit dem Ergebnis aus (a) die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ sowie die mittlere Energie $\langle E \rangle$. Drücke $\langle E \rangle$ durch $\langle N \rangle$ und T aus. (4 Punkte)

Aufgabe 10.3 (*Quantenstatistik idealer Gase*)

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir nochmal allgemeiner die mittlere Besetzungszahl von bestimmten idealen Quantengasen herleiten. Betrachte ein ideales Gas, dessen Atome verschiedene Energieniveaus E_{ν} annehmen können. Die Besetzungszahl jedes Energieniveaus sei beschränkt auf die Werte $n_{\nu} \in \{0, 1, \dots, l\}$.

(a) Berechne die großkanonische Zustandssumme dieses Systems. (4 Punkte)

(b) Zeige, dass die mittlere Besetzungszahl dieses Gases gegeben ist durch

$$\langle n_{\nu} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(E_{\nu}-\mu)} - 1} - \frac{l+1}{e^{\beta(E_{\nu}-\mu)(l+1)} - 1} \quad (3 \text{ Punkte})$$

(c) Berechne $\langle n_{\nu} \rangle$ für die Grenzfälle $l \rightarrow \infty$ und $l = 1$. $l \rightarrow \infty$ ist das aus der Vorlesung bekannte Bose-Gas, $l = 1$ ist das Fermi-Gas. (3 Punkte)