

THEORETISCHE PHYSIK IV: STATISTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK

4. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 16.5.08 in den Übungen

Aufgabe 4.1 (*Entropie und kanonische Zustandssumme*)**(10 Punkte)**

Die Entropie eines Systems mit N diskreten Zuständen ist definiert als

$$S = -k \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit für Zustand i darstellt.

Betrachte nun ein quantenmechanisches System, dessen Zustände (i) eine Gruppe von g_1 *gleichwahrscheinlichen* Zuständen mit Energie ϵ_1 und (ii) eine Gruppe von g_2 *gleichwahrscheinlichen* Zuständen mit Energie ϵ_2 sind.

(a) Zeige, dass die Entropie des Systems gegeben ist durch

$$S = -k \left[p_1 \ln \left(\frac{p_1}{g_1} \right) + p_2 \ln \left(\frac{p_2}{g_2} \right) \right]$$

wobei p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten sind, das System in einem Zustand der Gruppe 1 resp. 2 zu finden ($p_1 + p_2 = 1$). (2 Punkte)

(b) Unter der Annahme, dass die p_i durch die kanonische Verteilung gegeben sind, zeige dass

$$S = k \left[\ln g_1 + \ln \{ 1 + (g_2/g_1)e^{-x} \} + \frac{x}{1 + (g_1/g_2)e^x} \right]$$

wobei $x = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/kT > 0$ (4 Punkte)

(c) Verifiziere den Ausdruck aus (b) durch direkte Ableitung aus der kanonischen Zustandssumme des Systems (4 Punkte)

Aufgabe 4.2 (*Zipper-Model für DNA*)**(10 Punkte)**

Ein Modell für die Auftrennung eines DNA-Doppelstrangs in seine beiden Stränge ist das sogenannte "Zipper"-Modell. Es wird angenommen, dass sich der Doppelstrang nur von einer Seite wie ein Reißverschluss öffnen kann. Dieser Reißverschluss habe N Glieder, wobei jedes Glied entweder offen oder geschlossen ist. Ein offener Zustand habe die Energie ϵ , ein geschlossener Zustand die Energie 0. Der offene Zustand habe außerdem einen Entartungsgrad G , der angibt, wie viele räumliche Konformationen ein offenes Glied annimmt. Wir nehmen an, dass sich der Reißverschluss nur vom linken Ende her öffnen und dass sich ein Glied erst dann öffnen kann, wenn alle Glieder links von ihm bereits offen sind. Das letzte Glied ist immer geschlossen.

(a) Berechne die kanonische Zustandssumme des Systems. (4 Punkte)

(b) Ermittle die mittlere Anzahl der offenen Glieder im Grenzfall $\frac{\epsilon}{kT} \gg 1$ für gegebene Temperatur T . (6 Punkte)

Aufgabe 4.3 (*Teilchen im Magnetfeld*)**(10 Punkte)**

Befindet sich ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld H , so sind seine Energieniveaus aufgespalten in $-\mu H$ und $+\mu H$ mit magnetischem Moment μ oder $-\mu$ in Richtung von H . Betrachte ein System aus N solchen Teilchen in einem Magnetfeld H bei einer Temperatur T . Die Teilchen sollen nicht miteinander wechselwirken.

(a) Finde die Zustandssumme und das totale magnetische Moment $\langle M \rangle$ des Systems. (5 Punkte)

(b) Bestimme $\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle$. (5 Punkte)