

Vorlesungsskript

Theoretische Physik II Analytische Mechanik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

SS 2025

Stand 17. Juli 2025



Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Vorwort	5
1 Lagrange-Mechanik	6
1.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	6
Lagrange-Methode erster Art	8
Lagrange-Methode zweiter Art	9
Klassifizierung der möglichen Zwangsbedingungen	9
Lösungsverfahren für holonome Systeme	13
1.2 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen zweiter Art . .	15
1.3 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen	21
Wahl der generalisierten Koordinaten	21
1.4 Variationsrechnung	32
Zweidimensionale Taylor-Entwicklung	36
Variation ohne Nebenbedingung	37
Anwendung auf Lagrange-Mechanik: Wirkungsfunktional	39
Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichungen	44
Variation mit Nebenbedingungen	45
1.5 Hamiltonsches Prinzip	53
1.6 Symmetrien und Erhaltungssätze	57
Homogenität der Zeit	58
Homogenität des Raumes	60
Isotropie des Raumes	60
Noether-Theorem	61
1.7 Reibungskräfte	63
1.8 Nicht-holonome Systeme und Lagrange-Gleichungen erster Art . . .	65
1.9 Starrer Körper	77
2 Hamilton-Mechanik	85
2.1 Hamilton in der bisherigen Vorlesung	86
2.2 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen	88
2.3 Hamiltonsches Prinzip	90
2.4 Beispiele	91

Inhaltsverzeichnis

2.5	Volumen des Phasenraums	93
2.6	Satz von Liouville	95
2.7	Poisson-Klammer	96

Vorwort

Dieses Skript wurde erstmalig für die Anfängervorlesung *Theoretische Physik II - Analytische Mechanik und Thermodynamik* im Sommersemester 2011 erstellt. Der Heidelberger Studienplan für Bachelor-Studenten der Physik sieht für das erste Semester die Vorlesung *Theoretische Physik I - Mathematische Methoden und Klassische Mechanik* vor. Die *Analytische Mechanik* schließt daran nahtlos an und wird typischerweise vom gleichen Dozenten gehalten. Da die mathematischen Methoden und die Grundlagen der Mechanik dann eingeführt sind, beginnt sie etwa da, wo früher eine Mechanikvorlesung für Diplomstudenten begann. Vorgesehen sind im Prinzip die Mechanik von Lagrange, Hamilton und Hamilton-Jacobi. Aus Zeitgründen wurde jedoch auf den dritten Teil verzichtet, schließlich gilt es im zweiten Teil des Semesters noch, der Thermodynamik zu ihrem Recht zu verhelfen. Für diese Vorlesung können alle bekannten Lehrbücher zur Mechanik herangezogen werden, etwa diejenigen von Wolfgang Nolting, Torsten Fließbach, Walter Greiner, Florian Scheck oder Friedhelm Kuypers. Auch allgemeine Einführungen in die theoretische Physik (wie der Honerkamp-Römer) oder die Klassiker der Mechanik (Goldstein, Landau-Lifshitz, Feynman) sind zu empfehlen. Der aufmerksame Leser wird sicherlich merken, dass dieses Skript viel von den Büchern von Nolting und Fließbach profitiert hat. Wie im letzten Semester war die Absicht wieder, den Studierenden durch die Erstellung des Skripts bei der Nachbearbeitung der Vorlesung und der Vorbereitung der Klausur zu helfen.

Heidelberg, im April 2025

Ulrich Schwarz

1 Lagrange-Mechanik

Bisher haben wir uns mit der *Newtonschen Mechanik* befasst, die auch als *Klassische Mechanik* bekannt ist. Tatsächlich gibt es noch drei weitere Formulierungen der Mechanik, die nach Lagrange, Hamilton und Hamilton-Jacobi benannt sind, und als *Analytische Mechanik* zusammengefasst werden. Die *Lagrangesche Mechanik* befasst sich mit dem Problem der Zwangsbedingungen und zeigt, dass die Bewegungsgleichungen aus Variationsprinzipien abgeleitet werden können. Damit wird ein höheres Abstraktionsniveau als in der Klassischen Mechanik erreicht, das auch den Ausgangspunkt für andere fortgeschrittene Gebiete der Theoretischen Physik darstellt. Tatsächlich hat sich aus den beiden anderen Gebieten der Analytischen Mechanik die Quantenmechanik entwickelt: die *Hamiltonsche Mechanik* ist der Ausgangspunkt für die Matrizenmechanik nach Heisenberg und die *Hamilton-Jacobi-Mechanik* ist der Ausgangspunkt für die Wellenmechanik nach Schrödinger. Die Hamiltonsche Mechanik spielt auch eine wichtige Rolle für die Statistische Physik und die Theorie dynamischer Systeme, weil sie auf dem Konzept des Phasenraums aufbaut. Wir beginnen jetzt mit der Lagrangeschen Mechanik, die in der Analytischen Mechanik aufgrund ihrer Praxisrelevanz heraussticht.

1.1 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Das zentrale Ergebnis der Newtonschen Mechanik ist das zweite Newtonsche Gesetz, das für Mehrteilchensysteme folgende Bewegungsgleichung ergibt:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

wobei der Index $1 \leq i \leq N$ die N Teilchen durchnummeriert und auf der rechten Seite externe und interne Kräfte unterschieden werden. Mathematisch handelt es sich dabei um ein System von $3N$ gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs), so dass $6N$ Anfangsbedingungen zur Lösung nötig sind. Ein besonderer Aspekt der Newtonschen Mechanik besteht darin, dass sie die explizite Kenntnis aller Kräfte voraussetzt.

In vielen Fällen sind die wirkenden Kräfte nicht alle bekannt, dafür aber die Beschränkung in den Bewegungsmöglichkeiten, die diese verursachen. Man spricht dann von *Zwangskräften* und *Zwangsbedingungen*. Diese Situation ist der Ausgangspunkt für die Lagrangesche Mechanik.

Beispiele

1. Das **Fadenpendel** besitzt nur einen Freiheitsgrad, den Winkel φ , da die anderen Freiheitsgrade durch Zwangskräfte ausgeschaltet werden. Die Zwangskraft wirkt im Faden (Fadenspannung) und hält das Teilchen auf einer Kreisbahn. Es gilt die Zwangsbedingung $r^2 = l^2$. Eine Analyse mit Mitteln der Klassischen Mechanik setzt bei den wirkenden Kräften an, dabei müssen wir die (unbekannte) Zwangskraft mit ansetzen (es bieten sich Polarkoordinaten an):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \mathbf{F}_G + \mathbf{Z}$$

mit $\mathbf{Z} = Z \mathbf{e}_r$ (die Zwangskraft steht also senkrecht auf der Bewegungsrichtung.) Komponenten der Gewichtskraft in r und φ Richtung:

$$\begin{aligned} F_r &= mg \cos \varphi & F_\varphi &= -mg \sin \varphi \\ a_r &= \underbrace{\ddot{r}}_0 - r\dot{\varphi}^2 & a_\varphi &= \underbrace{2\dot{r}\dot{\varphi}}_0 + r\ddot{\varphi} \quad (\dot{r} = \ddot{r} = 0, \text{ da } r = l \text{ konstant ist.}) \\ \Rightarrow \quad r\text{-Anteil: } Z &= -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \\ \varphi\text{-Anteil: } ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi \end{aligned}$$

Wir können die DGL für φ lösen (es ergibt sich in der Näherung kleiner Auslenkungen der harmonische Oszillator) und das Ergebnis in die Gleichung in r Richtung einsetzen, um die Zwangskraft zu erhalten.

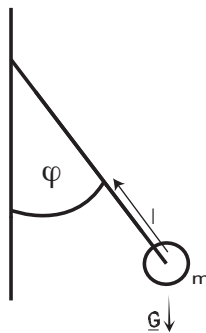


Abbildung 1.1: Mathematisches Pendel: die Fadenspannung ist eine Zwangskraft, die die Zwangsbedingung einer Kreisbahn bewirkt.

2. Auch die **Kolbenmaschine** besitzt effektiv nur einen Freiheitsgrad, den Winkel φ , obwohl sie eigentlich aus sehr vielen Teilchen besteht.

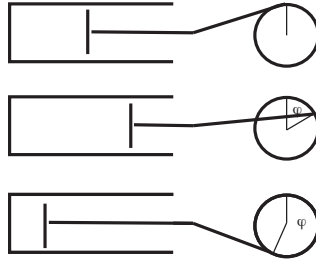


Abbildung 1.2: Kolbenmaschine: obwohl die Maschine sehr kompliziert ist, hat sie effektiv nur einen Freiheitsgrad.

Eine ähnliche Situation gibt es übrigens bei physikalischen Problemen, die durch partielle Differentialgleichungen mit gemischten Randbedingungen beschrieben werden. Beispiele sind elektromagnetische Wellen, die in eine Richtung eingeschränkt sind; oder ein verformbarer Körper, der auf einen Untergrund gedrückt wird, so dass an manchen Stellen die Verformung vorgegeben und an anderen Stellen zu bestimmen ist.

Das Problem besteht jetzt darin, dass man die gegebene Information über das System anders nutzen muss, da man nicht mehr einfach von Kräften auf Bewegungen schließen kann. Die Lagrangesche Mechanik stellt mehrere Strategien bereit, mit Zwangskräften umzugehen. Am Beispiel des Fadenpendels:

Lagrange-Methode erster Art

Die Bewegungsgleichung wird explizit mit Zwangskräften gelöst:

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \lambda(t) \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^2 - l^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ Gleichungen} \\ \text{für 4 Unbekannte} \end{array} \quad (1.2)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Zwangskraft in Fadenrichtung wirkt. $\lambda(t)$ wird *Lagrange-Parameter* genannt. In der Lagrange-Methode erster Art wird dieses Verfahren, Lagrange-Parameter einzuführen, verallgemeinert. Wenn hier p Zwangsbedingungen vorliegen, haben wir nur noch $3N - p = S$ Freiheitsgrade, müssen aber trotzdem noch alle $3N$ Gleichungen lösen. Eine recheneffizientere Alternative bietet die

Lagrange-Methode zweiter Art

Die Bewegungsgleichungen werden durch Multiplikation mit einem Tangentialvektor auf die Fläche projiziert, auf der sich das System aufgrund der Zwangskräfte bewegt. Dabei fallen die Zwangskräfte heraus und es bleiben nur die relevanten Koordinaten übrig, in unserem Beispiel also nur die Winkelkoordinate. Für das Fadenpendel lautet die Bewegungsgleichung auf $\mathbf{e}_\varphi$ projiziert:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (1.3)$$

Wir müssen also nur noch S Gleichungen lösen und sparen uns somit p Rechnungen. Der Nachteil ist jedoch, dass wir die Zwangskräfte nicht mehr direkt erhalten, diese müssen (sofern man an diesen interessiert ist) nachträglich berechnet werden:

$$\mathbf{Z} = m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{G} \quad (1.4)$$

Die Lagrange-Methode zweiter Art stellt eine Vorschrift auf, um solche Bewegungsgleichungen elegant und einfach herzuleiten.

Klassifizierung der möglichen Zwangsbedingungen

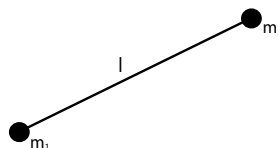
Wie so oft in der Theoretischen Physik ist eine systematische Klassifizierung aller möglichen Fälle die Voraussetzung für eine erfolgreiche Entwicklung für Lösungsstrategien.

A holonom (global) Es gibt p Einschränkungen in der Form:

$$f_\nu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad 1 \leq \nu \leq p \quad (1.5)$$

A1 holonom-skleronom (starr) Es gibt keine explizite Zeitabhängigkeit, $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0$

- 1) Fadenpendel
- 2) Kolbenmaschine
- 3) Hantel: $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0$



1 Lagrange-Mechanik

4) Starrer Körper: $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

5) Teilchen auf Kugeloberfläche: $\mathbf{r}^2 - R^2 = 0$

A2 holonom-rheonom (fließend) Mit expliziter Zeitabhängigkeit $\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0$

1) Teilchen im Aufzug mit vorgegebenen $z(t)$:

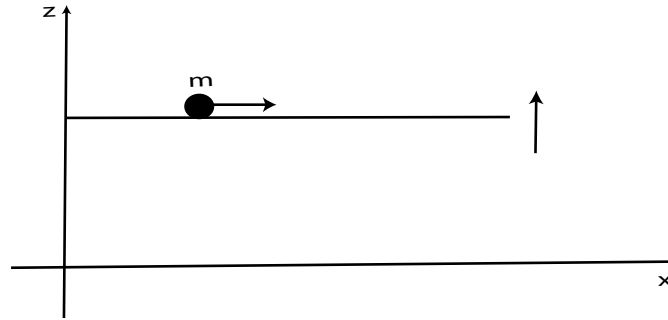


Abbildung 1.3: Ein Teilchen im Aufzug hat eine vorgegebene Koordinate $z(t)$.

$$f(z, t) = z(t) - [z_0 + v_0(t - t_0)] = 0 \quad (1.6)$$

2) Teilchen auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung

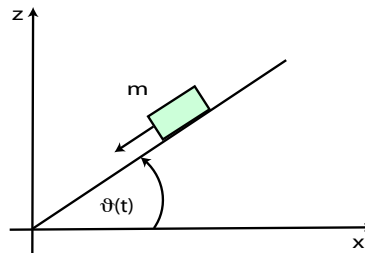


Abbildung 1.4: Ähnlich wie Teilchen im Aufzug, aber dieses Mal ändert sich eine Winkelkoordinate.

$$\frac{z(t)}{x(t)} = \tan \varphi(t) \Rightarrow f(x, z, t) = z(t) - x(t) \tan(\varphi) = 0 \quad (1.7)$$

1 Lagrange-Mechanik

- 3) Schaukeln: entspricht einem Pendel, bei dem durch geschickte Körperverlagerung die Fadenlänge dynamisch geändert wird und so das System aufgeschaukelt wird.

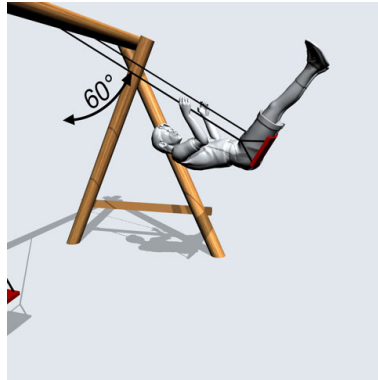


Abbildung 1.5: Geschicktes Schaukeln erhöht die Amplitude.

- 4) Weihrauchfass von Santiago de Compostela (am Ende des Jakobswegs)

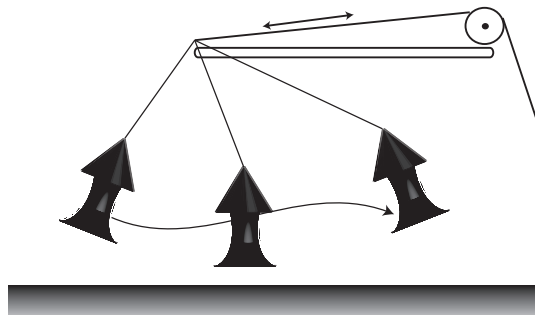


Abbildung 1.6: Durch geschicktes Ziehen an der Aufhängung wird das Weihrauchfass ins Schwingen gebracht.

- 5) Jojo

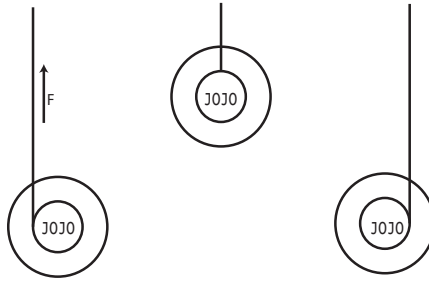


Abbildung 1.7: Auch hier führt geschicktes Ziehen zum Aufschaukeln.

Die Beispiele 4-5 zeigen, dass man in solchen Fällen von außen Energie zuführen kann.

B nicht-holonom Es existieren keine Funktionen der Art $f_\nu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$. Typischerweise sind die Zwangsbedingungen Ungleichungen oder differentieller Natur.

- 1) Abakus (Perlen auf Rechenbrett): es gibt keine Gleichungen, nur Ungleichungen der Art $a \leq x_i \leq b$.
- 2) Teilchen in einer Kugel: auch hier gibt es nur eine Ungleichung, $\mathbf{r}^2 \leq R^2$
- 3) Rollen eines Rades auf einer Unterlage (mit Reibung, ohne Gleiten): dieses Problem führt nur auf eine differentielle, aber nicht auf eine globale Zwangsbedingung. Die Konfiguration des Rades wird durch die Koordinaten $(x, y, \vartheta, \varphi)$ vollständig beschrieben.

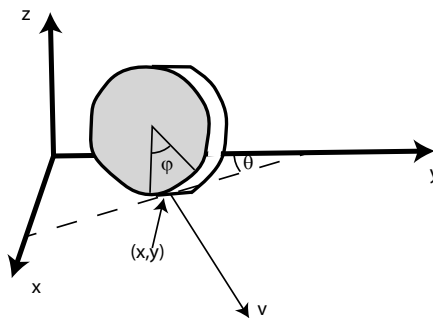


Abbildung 1.8: Koordinaten für das rollende Rad

1 Lagrange-Mechanik

Die Rollbedingung führt zu folgenden Einschränkungen:

$$v = R \cdot \dot{\varphi} \quad (1.8)$$

$$\dot{x} = v_x = v \cdot \cos \vartheta \quad (1.9)$$

$$\dot{y} = v_y = v \cdot \sin \vartheta \quad (1.10)$$

Das führt zu folgenden differentiellen Zwangsbedingungen:

$$\boxed{dx - R \cos \vartheta d\varphi = 0, \quad dy - R \sin \vartheta d\varphi = 0}$$

Diese differentielle Form entspricht nicht einer globalen Funktion $f(x, y, \vartheta, \varphi)$.

Da $\vartheta(t)$ nicht bekannt ist, können wir die Bedingung nicht integrieren.

Physikalisch entspricht dies der Tatsache, dass alle Werte von $f(x, y, \vartheta, \varphi)$ möglich sind, wenn man nur geschickt hin- und herrollt.

Um dem holonomen Fall zu entsprechen, müssen die differentielle Zwangsbedingungen ein totales Differential bilden. Die Bedingung $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$ muss gelten, damit sich holonome Zwangsbedingungen $f_\nu(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ ergeben. Für holonome Zwangsbedingungen gibt es allgemeine Lösungsverfahren, im Gegensatz zu nicht-holonomen Zwangsbedingungen.

Lösungsverfahren für holonome Systeme

Das System hat $S = 3N - p$ Freiheitsgrade. Wir führen S *generalisierte Koordinaten* q_i ($1 \leq i \leq S$) ein. Die generalisierten Koordinaten werden je nach physikalischer Fragestellung definiert und werden so gewählt dass:

- 1) eine eindeutige Transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$ existiert und
- 2) die q_i unabhängig voneinander sind, d.h. es gibt keine Funktionen der Form $F(q_1, \dots, q_s, t) = 0$

Bemerkungen

- 1) Die $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$ spannen den *Konfigurationsraum* auf. $\mathbf{q}$ ist der *Konfigurationsvektor*, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ sind die *generalisierte Geschwindigkeiten*.
- 2) q_i und $\dot{q}_i$ haben nicht notwendigerweise die Dimensionen m und $\frac{m}{s}$. Zum Beispiel kann es sich dabei auch um Winkel handeln.
- 3) Wir benötigen 2S Anfangsbedingungen.
- 4) Die q_i entsprechen den angepassten Koordinaten y_i aus der Klassischen Mechanik.

Beispiele

1. Teilchen auf Kugeloberfläche

$$\mathbf{r}^2 - R^2 = 0 \Rightarrow p = 1, S = 3 - 1 = 2$$

Hier bieten sich Kugelkoordinaten an, $q_1 = \varphi, q_2 = \vartheta$.

2. Ebenes Doppelpendel

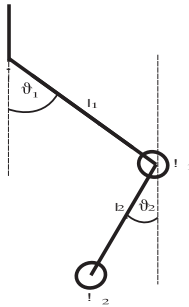


Abbildung 1.9: Das ebene Doppelpendel hat zwei Freiheitsgrade.

$$S = 2 \quad q_1 = \vartheta_1 \quad q_2 = \vartheta_2$$

3. Teilchen im Zentralfeld

Bei diesem Beispiel gibt es keine äußeren Kräfte, außerdem gilt die Drehimpulserhaltung

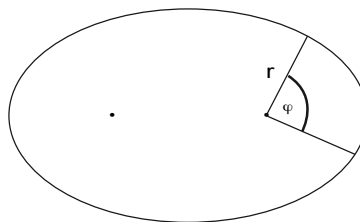


Abbildung 1.10: Generalisierte Koordinaten für Keplerproblem

$$\Rightarrow S = 2 \quad q_1 = r \quad q_2 = \varphi$$

1.2 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Ziel der Lagrange-Methode der zweiten Art sind Bewegungsgleichungen für generalisierte Koordinaten. Dabei stellt sich heraus, dass dies mit einem skalaren Prinzip erreicht werden kann, das somit die vektorielle Formulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen ersetzt. Diese Vorgehensweise ist eleganter und bietet sich als Ausgangspunkt für höhere Begriffsbildungen an.

Der Grundgedanke der Lagrange-Methode 2. Art besteht daraus, die Bewegungsgleichungen auf den Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit der erlaubten Zustände Ω_t zu projizieren. Um das umzusetzen führen wir die *virtuelle Verrückung* $\delta \mathbf{r}_i$ ein. Diese erfolgt instantan ($\delta t = 0$) und genügt den **momentanen** Zwangsbedingungen.

Beispiel

Teilchen im Aufzug

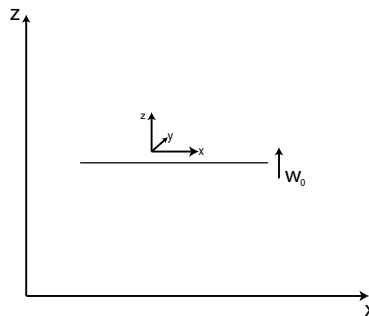


Abbildung 1.11: Erklärung des Konzepts der virtuellen Verrückung.

- generalisierte Koordinate $q = x$
- Verrückung $d\mathbf{r} = (dx, dz) = (dq, v_0 dt)$
- virtuelle Verrückung $\delta \mathbf{r} = (\delta x, 0) = (\delta q, 0)$

Offensichtlich gilt hier $\delta \mathbf{r} \neq d\mathbf{r}$ (gilt allgemein für rheonome Systeme).

Unser Ausgangspunkt sind die Newtonsche Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}_{\text{Trägheitskräfte}} = \underbrace{\mathbf{K}_i}_{\text{direkte Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{Z}_i}_{\text{Zwangskräfte}} \quad (1.11)$$

Wir projizieren auf die erlaubte Bahn durch skalare Vektormultiplikation mit der virtuellen Verrückung:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{=\delta W, \text{virtuelle Arbeit}} = 0 \quad (1.12)$$

Die Summe ist notwendig, da virtuelle Verrückungen im allgemeinen Fall nicht auf einzelne Teilchenkoordinaten eingeschränkt sind.

In der Regel gilt das **Prinzip der virtuellen Arbeit**: $\delta W = 0$, d.h. die Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit (Ausnahme Reibungskräfte).

Beispiele

1. Fadenpendel

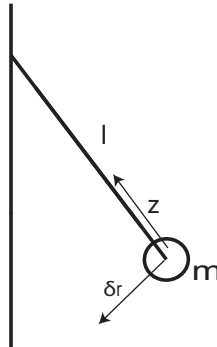


Abbildung 1.12: Fadenpendel

$$\mathbf{Z} \perp \delta \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \delta W = -\mathbf{Z} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

2. Hantel

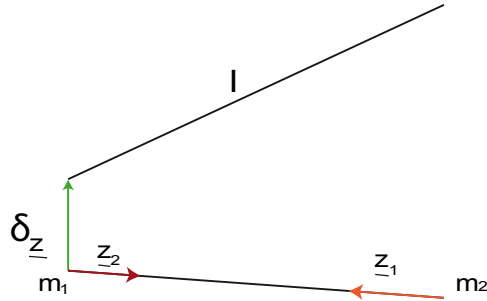


Abbildung 1.13: Hantel

$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{Z}_2$$

Virtuelle Verrückung: kann in Translation und Rotation zerlegt werden

$$\delta \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{s}$$

$$\delta \mathbf{r}_2 = \delta \mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_R$$

$$\delta W = -\mathbf{Z}_1 \delta \mathbf{s} - \underbrace{\mathbf{Z}_2}_{-\mathbf{Z}_1} (\delta \mathbf{s} + \delta \mathbf{x}_R) \quad (1.13)$$

$$= -\mathbf{Z}_1 (\underbrace{\delta \mathbf{s} - \delta \mathbf{s}}_{=0}) - \mathbf{Z}_2 \underbrace{\delta \mathbf{x}_R}_{\perp \mathbf{Z}_2 = 0} \quad (1.14)$$

Gesamtbetrachtung benötigt beide Teilchen

3. Atwoodsche Fallmaschine

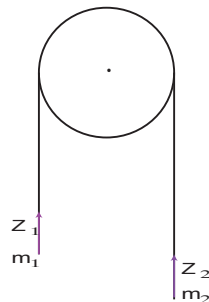


Abbildung 1.14: Atwoodsche Fallmaschine

1 Lagrange-Mechanik

$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$ (ähnlich wie bei der Hantel, aber andere Richtung).

Die virtuelle Verrückung $(\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2) = (\delta \mathbf{z}, -\delta \mathbf{z})$ koppelt beide Teilchen!

$$\delta W = -\mathbf{Z}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{Z}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = -\mathbf{Z}_1 \underbrace{(\delta \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_2)}_{\delta \mathbf{z} - \delta \mathbf{z}} = 0$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit vereinfacht sich unsere Umformulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, die Zwangskräfte fallen explizit raus:

$$\sum_{i=1}^N \left(\overset{\textcircled{1}}{m \ddot{\mathbf{r}}_i} - \overset{\textcircled{2}}{\mathbf{K}_i} \right) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.15)$$

Diese Gleichung ist als *D'Alembertsches Prinzip* bekannt. Die Zwangskräfte können eliminiert werden, die Zwangsbedingungen sind aber durch die virtuelle Verrückung noch repräsentiert. Nachdem die Zwangskräfte rausgefallen sind, haben wir noch Terme für Trägheitskräfte und direkte Kräfte. Im folgenden werden wir jeden Term für sich geschickt umformulieren.

Um verwertbare Bewegungsgleichungen zu erhalten, wechseln wir jetzt zu generalisierten Koordinaten. Wir verlangen also, dass es Transformationsformeln gibt der Art

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (1.16)$$

Die partiellen Ableitungen müssen mindestens bis zur zweiten Ordnung stetig sein. Wir bilden das totale Differential der Transformationsformeln:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.17)$$

Daraus ergeben sich drei wichtige Formeln:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \text{virtuelle Verrückung} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{l=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (1.20)$$

Umschreiben von 2:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{=: Q_j} \delta q_j \quad (1.21)$$

Die Q_j werden *generalisierte Kraftkomponenten* genannt.

Konservative Systeme:

$$\mathbf{K}_i = -\nabla V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

$$\Rightarrow Q_j = -\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad (1.22)$$

Umschreiben von 1:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}} \right) - \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \end{aligned} \quad (1.23)$$

wobei die kinetische Energie $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$

Kombination von 1 und 2

$$\boxed{\sum_{j=1}^S \left\{ \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0} \quad (1.24)$$

Ist die allgemeine Formulierung des D'Alembertschen Prinzips.

Physikalisch besonders relevant ist der Fall von konservativen Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen.

1 Lagrange-Mechanik

Holonom keine Einschränkung der Art $F(\mathbf{q}, t) = 0$

$\Rightarrow \delta q_j$ sind unabhängig, Summe über j entfällt

Konservativ:

$$Q_j = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_j}, \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{(T - V)}_{=:L} - \frac{\partial}{\partial q_j} \underbrace{(T - V)}_{=:L} = 0 \quad (1.25)$$

Hier haben wir jetzt das zentrale Konzept der Lagrangeschen Mechanik eingeführt, die **Lagrange-Funktion**:

$$\boxed{L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)}$$

Damit folgt das zentrale Ergebnis der Lagrangeschen Mechanik, die **Lagrange Gleichungen der zweiter Art**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad 1 \leq j \leq S$$

Diese Differentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten ersetzen in der Lagrangeschen Mechanik die Newtonschen Bewegungsgleichungen der Klassischen Mechanik.

Ohne Zwangsbedingungen vereinfachen sich die Lagrange-Gleichungen zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen: $S = 3N$

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, \dots, z_N, t) \quad (1.26)$$

Wir bilden die Lagrange-Gleichung für die erste Koordinate des ersten Teilchens, x_1 (alle anderen Koordinaten sind gleichwertig):

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = F_{x_1} \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \ddot{x}_1 = F_{x_1}}$$

Das ist genau das zweite Gesetz von Newton.

Anmerkungen

1. Die Lagrange-Funktion $L = T - V = L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S)$ enthält alle Informationen in einer einzigen Funktionen, die sowohl skalar, als auch viel abstrakter und deshalb auch viel erweiterbarer ist als die Methoden der Klassischen Mechanik

2. Die Lagrange-Methode 2.Art ist extrem praktisch, da sie in vielen Fällen verwendet werden kann und eine Art "Rezept" bietet, um physikalische Systeme zu lösen
3. Im Gegensatz zur Lagrange-Methode 1.Art müssen wir nur S gewöhnliche DGLs 2.Ordnung lösen, weshalb wir (wie in der KM) $2S$ Anfangsbedingungen benötigen.

1.3 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen

Für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen bietet die Lagrange-Mechanik ein Rezept:

- 1) Zwangsbedingungen formulieren ($f_\nu = 0$); S Freiheitsgrade abzählen
- 2) S generalisierte Koordinaten $\mathbf{q}$ entsprechend wählen; Transformationsformeln formulieren: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$
- 3) Lagrange-Funktion $L = T - V = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ berechnen
- 4) S Lagrange-Gleichungen berechnen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow S \text{ gekoppelte ODEs}$$

- 5) Differentialgleichungen lösen, $2S$ Anfangsbedingungen; wenn möglich Erhaltungsgrößen ausnützen
- 6) Auf ursprüngliche Koordinaten zurücktransformieren; Diskussion der Lösung

Wahl der generalisierten Koordinaten

Bei der Wahl der $\{q_i\}_{1 \leq i \leq S}$ gibt es eine große Freiheit, weil die Form der Lagrange-Gleichungen invariant unter Punkttransformationen ist.

Wir treffen eine beliebige andere Wahl $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S]$ für die generalisierten Koordinaten. Dann gibt es eine eindeutige Beziehung:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S, t) = q_i(\bar{\mathbf{q}}, t) \Rightarrow \bar{q}_i = \bar{q}_i(\mathbf{q}, t) \\ \Rightarrow \dot{\bar{q}}_i &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} = \dot{\bar{q}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Wir setzen die neuen Koordinaten in die Lagrange-Funktion ein:

$$\bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) = L[\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t)]$$

Behauptung: Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_l} = 0.$$

Beweis:

$$\dot{q}_j = \left[\sum_{l=1}^S \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \dot{\bar{q}}_l \right] + \frac{\partial q_j}{\partial t} \implies \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_l} = \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l}}_{(2.1)} + \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l}}_{(2.2)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_l} \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \sum_{j=1}^S \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l}}_{(3.1)} + \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l}}_{(3.2)} \quad (3)$$

Zusammensetzen von (2) und (3): Dabei führen (3.1) und (2.1) auf die Lagrange-Gleichungen mit denen wir gestartet sind.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_l} = \sum_{j=1}^S \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l}}_{=0} + \sum_{j=1}^S \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l} \right)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

Also gelten die Lagrange-Gleichungen unabhängig von den gewählten generalisierten Koordinaten.

Beispiele

1. Ebenes Fadenpendel $S = 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrade

$q_1 = q = \varphi(t)$ Auslenkungswinkel aus den Polarkoordinaten

1 Lagrange-Mechanik

$$\begin{aligned}
 x &= l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi, \quad z = 0 \\
 T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi}) \\
 V &= -mgy = -mg \cos \varphi = V(\varphi) \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi} \\
 \Rightarrow \quad 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi \\
 \Rightarrow \quad &\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0} \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

Die Herleitung ist also deutlich einfacher als in der KM.

2. Atwoodsche Fallmaschine

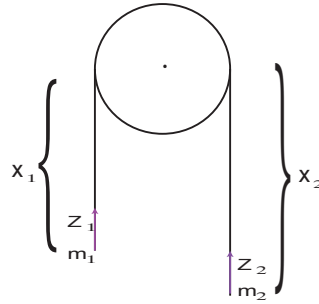


Abbildung 1.15: Atwoodsche Fallmaschine

Auf den ersten Blick sieht dieses Beispiel so aus, als könnte man es nicht mit der Lagrange-Methode 2. Art lösen, da die Zwangskräfte entlang der Bewegungsrichtung zeigen(nach unten/oben). Dieser Schluss ist allerdings fehlerhaft, da die Zwangskräfte im Konfigurationsraum orthogonal zur erlaubten Bewegung sein müssen, nicht aber im physikalischen Raum. In diesem Fall ist die erlaubte Untermannigfaltigkeit Ω_t die Gerade die durch $x_1 - x_2$ gegeben ist, die Zwangskräfte zeigen in Richtung $x_1 + x_2$, sind also orthogonal zu Ω_t .

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$$

1 Lagrange-Mechanik

$$(x_1 + x_2) - l = 0 \Rightarrow S = 6 - 5 = 1 \Rightarrow q = x_1$$

$$\begin{aligned} \text{Transformationsformeln: } x_1 &= q \\ x_2 &= l - q \end{aligned}$$

kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 \quad (1.29)$$

potentielle Energie

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = -(m_1 - m_2)gq - m_2gl \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2)gq + m_2gl \quad (1.31)$$

Bewegungs-(Lagrange-)Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 + m_2)\ddot{q} - (m_1 - m_2)g = 0 \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

Die Situation ist also ähnlich wie beim freier Fall, die Beschleunigung ist nämlich konstant. Allerdings ist die Erdbeschleunigung g hier durch eine dimensionslose Kombination der Massen reduziert, d.h. die Fallmaschine kann benutzt werden, um Fallprozesse genauer zu vermessen. Für $m_1 = m_2$ folgt wie erwartet $\ddot{q} = 0$. Die Zwangskraft $\mathbf{Z}$ kann nachträglich berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= m_1g + Z \\ m_2\ddot{x}_2 &= m_2g + Z \end{aligned} \right\} \text{Newton}$$

Subtrahieren:

$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)\ddot{q} \quad (1.33)$$

$$= (m_1 - m_2)g \quad (1.34)$$

Addieren:

$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)\ddot{q} \quad (1.35)$$

$$= \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}g = (m_1 + m_2)g + 2Z \quad (1.36)$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)} g = \boxed{-2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = Z} \quad (1.37)$$

Das negative Vorzeichen spiegelt wieder, dass die Zwangskraft der Gewichtskraft entgegen wirkt. Die Massen gehen hier als reduzierte Masse μ ein. Die Zwangskraft ist also konstant, sie hängt nicht vom Bewegungszustand ab.

3. Perle auf rotierendem Draht

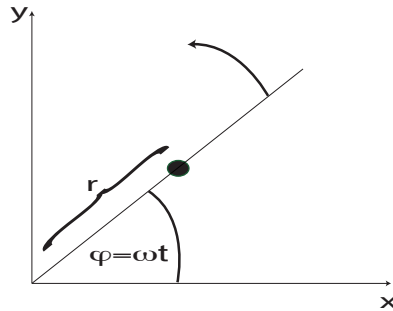


Abbildung 1.16: Eine Perle gleitet auf einem Draht, der in der x-y-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert

zwei holonome Zwangsbedingungen: skleronom $z = 0$, rheonom $\frac{y(t)}{x(t)} = \tan \omega t$.
Deshalb gilt $S = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q = r$.

Transformationsformeln:

$$x = q \cos \omega t$$

$$y = q \sin \omega t$$

$$z = 0$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} [(\dot{q} \cos \omega t - q\omega \sin \omega t)^2 + (\dot{q} \sin \omega t + q\omega \cos \omega t)^2] \quad (1.38)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) \quad V = 0 \Rightarrow L = T \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \underbrace{m\ddot{q}}_{\text{Trägheitskraft}} - \underbrace{m\omega^2 q}_{\text{Zentrifugalkraft}} \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} = \omega^2 q} \quad \text{wie ableitende Kette}$$

Allgemeine Lösung: $q = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$q(0) = r_0, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}r_0 \quad (1.41)$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = r_0 \cosh \omega t} \quad (1.42)$$

Virtuelle Arbeit $\delta W = 0$

4. Schwingende Hantel

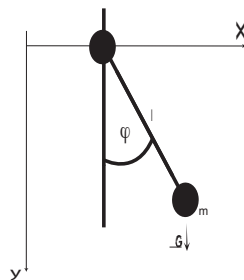


Abbildung 1.17: Der Aufhängepunkt des Pendels kann sich reibungsfrei auf der Horizontalen bewegen.

m_1 gleitet reibungsfrei und m_2 schwingt.

4 holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$z_1 = z_2 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0 \quad \Rightarrow S = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Transformationsformeln:} \quad x_1 &= q_1 & y_1 &= z_1 = z_2 = 0 \\ x_2 &= q_1 + l \sin q_2 & y_2 &= l \cos q_2 \end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[(\dot{q}_1 + l\dot{q}_2 \cos q_2)^2 + (-l\dot{q}_2 \sin q_2)^2] \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{q}_1^2 + l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2] \end{aligned} \quad (1.43)$$

potentielle Energie:

$$V = -m_2 g l \cos q_2 \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{q}_2^2 + 2l\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + m_2 g l \cos q_2 \quad (1.45)$$

L hängt nicht von q_1 ab! Solche Koordinaten heißen *zyklisch*. Jede zyklische Variable führt zu einem Erhaltungssatz und erleichtert die Lösung der Bewegungsgleichungen. Hier entspricht q_1 der Verschiebung in x-Richtung, dies ist eine *weiche Mode* des Systems.

Lagrange-Gleichung $0 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$

$$\Rightarrow \text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 + m_2 l \cos(q_2)\dot{q}_2 = c \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_1 = c - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \cos(q_2)\dot{q}_2$$

$$\Rightarrow q_1 = ct - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2 + a \quad (1.47)$$

Der Einfachheit halber wählen wir Anfangsbedingungen, die $a = c = 0$ entsprechen:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0 & q_2(0) &= 0 \\ \dot{q}_1(0) &= -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \omega_0 & \dot{q}_2(0) &= \omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = q_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi$$

$$x_2 = q_1 + l \sin q_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi$$

$$y_2 = l \cos q_2 = l \cos \varphi$$

Die Ausnützung der Erhaltungsgröße führt also auf eine Parametrisierung der Bahnkurven durch φ :

Masse 1 (x_1): Der Aufhängepunkt oszilliert gegenläufig zum Pendel. Wenn m_1 von außen getrieben wird, dann dämpft das daran hängende Pendel die Bewegung dieser Masse. Deshalb ist dieses System die Grundlage einer *Schwingungstilgung*, wie sie z.B. im 508 m hohen Hochhaus Taipei 101 verwendet wird, um durch Wind oder Erdbeben angeregte Schwingungen

auszudämpfen. Dabei handelt es sich um ein Pendel von 42 m Länge mit einer 660 Tonnen schweren (vergoldeten) Stahlkugel.

Masse 2 (x_2, y_2) : Die schwingende Masse beschreibt eine Ellipsenbahn.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Im Limes $m_1 \rightarrow \infty : x_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ Kreisbahn} \Rightarrow \text{mathematisches Pendel}$$

Eine vollständige Lösung muss eine Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ ergeben. Dafür müssen wir zu den Lagrange-Gleichungen zurückgehen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2(l^2 \dot{q}_2 + l \cos q_2 \dot{q}_1) \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + g) \sin q_2 \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 l^2 \ddot{q}_2 + m_2 l \cos q_2 \ddot{q}_1 + m_2 g l \sin q_2$$

Näherung kleiner Winkel: $l\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + gq_2 \approx 0$

Außerdem:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi \Rightarrow \ddot{q}_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 \\ \Rightarrow \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 + gq_2 &\approx 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0} \end{aligned} \quad (1.50)$$

In der Näherung kleiner Winkel erhalten wir also einen harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}$ für $m_1 \rightarrow \infty$ (mathematisches Pendel).

5. Zykloidenpendel (Huygens 1673)

Im Gegensatz zum Fadenpendel bewegt sich der Massenpunkt nicht auf einer Kreisbahn, sondern auf einer Zykloide. Wie beim Fadenpendel gibt es nur einen Freiheitsgrad, $S = 1$, $q = \varphi$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Gewichtskraft zu einer Schwingung um $\varphi = 0$ führt.

1 Lagrange-Mechanik

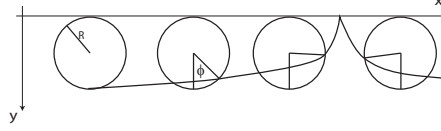


Abbildung 1.18: Ein Rad rollt an der Decke ab. Die Gewichtskraft sorgt dafür, dass es eine Schwingung gibt um den Nullwert des gewählten Winkels.

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi + R \sin \varphi \\ R + R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi)$$

$$\dot{y} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi$$

kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}R^2(2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

potentielle Energie

$$V = -mgy = -mgR(1 + \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow L = T - V = mR(1 + \cos q)(R\dot{q}^2 + g) \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2mR^2(1 + \cos q)\dot{q} \quad (1.52)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2mR^2 \left[\underbrace{(1 + \cos q)}_{2 \cos^2 \frac{q}{2}} \ddot{q} - \underbrace{\sin q}_{2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}} \dot{q}^2 \right] \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -mR \underbrace{\sin q}_{2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}} (R\dot{q}^2 + g) \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \\
 &= 2mR^2 [2\ddot{q} \cos^2 \frac{q}{2} - 2\dot{q}^2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}] + 2mR \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} (R\dot{q}^2 + g) \\
 \Rightarrow 0 &= \underbrace{2\ddot{q} \cos \frac{q}{2} - \dot{q}^2 \sin \frac{q}{2}}_{\substack{4 \frac{d^2}{dt^2} (\sin \frac{q}{2})}} + \frac{g}{R} \sin \frac{q}{2} = 0 \\
 \sin \frac{q}{2} : &= f(t) \Rightarrow \boxed{f''(t) + \frac{g}{4R} \cdot f(t) = 0}
 \end{aligned}$$

Harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$. Wie beim Fadenpendel ist also die Frequenz unabhängig von der Masse und der Amplitude. Im Gegensatz zum Fadenpendel ist die lineare Lösung exakt für alle Winkel, d.h. sie gilt nicht nur in der Näherung kleiner Winkel. In der Praxis ist das Zykloidenpendel allerdings schwer zu realisieren, weil Reibung typischerweise zu starker Dämpfung führt.

Die vollständige Lösung lautet:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}] \quad (1.55)$$

wobei A,B aus den Anfangsbedingungen gewonnen wird.

6. Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten ein freies Teilchen ($V = 0$) ohne Zwangsbedingungen ($S = 3$). Als generalisierte Koordinaten wählen wir einen Satz von krummlinigen Koordinaten (z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten). Es gibt also zwar keine Zwangsbedingungen, aber Transformationsformeln:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad 1 \leq i \leq 3$$

Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{q} = (\rho, \varphi, z)$$

Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \mathbf{q} = (r, \vartheta, \varphi)$$

1 Lagrange-Mechanik

$$\begin{aligned}
 dx_i &= \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \\
 \Rightarrow ds^2 &= \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_j dq_k \\
 &= \sum_{j,k=1}^3 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}}_{g_{jk}(\mathbf{q})} dq_j dq_k
 \end{aligned}$$

Das differentielle Wegelement ds bestimmt die Länge zwischen zwei Punkten im Raum, also die *Metrik* des Raums. $g_{jk}(\mathbf{q})$ ist der *metrische Tensor* und beschreibt die Massverhältnisse in dem gewählten Koordinatensystem. Achtung: der metrische Tensor ist **nicht** die Jacobi-Matrix, vergleiche Kapitel 1.6 im Skript PTP1.

Wir beschränken uns auf orthogonale Koordinaten, dann ist der metrische Tensor diagonal:

$$g_{jk}(\mathbf{q}) = \delta_{jk} h_j(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Kugelkoordinaten: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Lagrange- Funktion:

$$\begin{aligned}
 L = T &= \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 = \frac{m}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.56) \\
 &= \begin{cases} \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) & \text{Zylinderkoordinaten} \\ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) & \text{Kugelkoordinaten} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen folgen dann einfach aus den Lagrange-Gleichungen, also aus $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ ($1 \leq j \leq 3$).

Beispiel: Beschleunigung in Radialrichtung in Kugelkoordinaten, keine äußeren Kräfte, nur Trägheit, also $a_r = 0$ (Masse kürzt sich raus)

$$\boxed{\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 = 0} \quad (1.57)$$

Dieses Ergebnis wurde in PTP1 im Kapitel 1.7 explizit mit Vektorrechnung hergeleitet. Hier folgt es relativ einfach aus skalaren Rechnungen.

1.4 Variationsrechnung

Unser zentrales Ergebnis bisher waren die Lagrange-Gleichungen, die einen klaren physikalischen Ursprung haben, nämlich das geschickte Umschreiben der Newtonschen Bewegungsgleichungen. Wenn man diese Gleichungen allerdings einem Mathematiker / einer Mathematikerin zeigt, wird er / sie diese ohne physikalische Vorkenntnis trotzdem kennen, und zwar als Grundgleichung der Variationsrechnung.

Erinnerung: In der reellen Analysis werden die Extrema einer Funktion durch eine verschwindende Ableitung, $f'(x) = 0$, charakterisiert.

Problemstellung: Bei uns geht es nicht um optimale Punkte, sondern um optimale Funktionen, also um die Frage, welche Funktion (Trajektorie) die Bewegungsgleichung löst. Wenn es dafür ein Extremumsprinzip gibt, was genau wird dann optimiert?

Antwort: Optimale Funktionen machen ein *Funktional* stationär. Funktionale sind Funktionen, die Funktionen Skalare zuordnen und Thema der *Funktionalanalysis*. Ein einfaches Beispiel für ein Funktional wäre das Längenfunktional $L[y]$, welches einem Weg $y(x)$ seine Länge $L[y] = \int dS$ zuordnet.

Funktional = Abbildung $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ni y(x) \mapsto F[y] \in \mathbb{R}$

Achtung: im Gegensatz zu den runden Klammern für Funktionen werden für Funktionale eckige Klammern verwendet.

Beispiele für Variationsprobleme

- 1.** Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene? Minimiert wird die Bogenlänge:

$$L[y] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

1 Lagrange-Mechanik

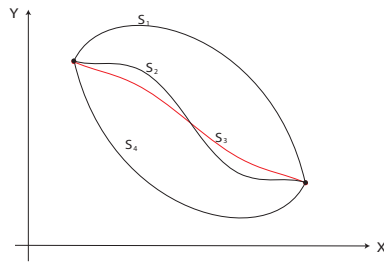


Abbildung 1.19: Verschiedene Wege verbinden die zwei Punkte. Welcher davon ist die kürzeste Verbindung?

Dieses Beispiel ist typisch für die Physik: das Funktional ist typischerweise ein Integral über eine Funktion F von $y(x)$. Das Integral wandelt die Funktion F in einen skalaren Wert um, der dann nach der Funktion $y(x)$ minimiert werden kann. Die Randwerte werden dabei typischerweise festgehalten.

- 2. Minimalflächen:** Welche Fläche hat für einen gegebenen Rahmen den kleinsten Flächeninhalt?

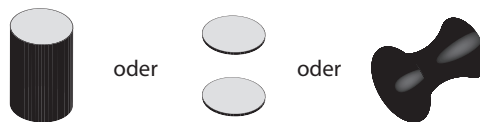


Abbildung 1.20: Mögliche Kandidaten für die kleinste Fläche zwischen Kreisen als Rahmen: Zylinder, zwei Ebenen, Katenoid. Die optimale Lösung hängt von Abstand und Radius der Kreise ab, aber das Katenoid ist immer besser als der Zylinder.

Rotationsflächen:

$$A = \int 2\pi x dS = \int \underbrace{2\pi x \sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y', x)} dx$$

Anwendungen: Seifenfilme auf Drahtschlaufen; Leichtbauwerke: z.B. Olympiadach München; Bionik / Biomimetik (z.B. Spinnennetze)

3. Brachistochronen-Problem

Auf welchem Weg $y(x)$ gelangt ein reibungslos gleitender Massenpunkt im Schwerfeld am schnellsten von 1 zu 2?

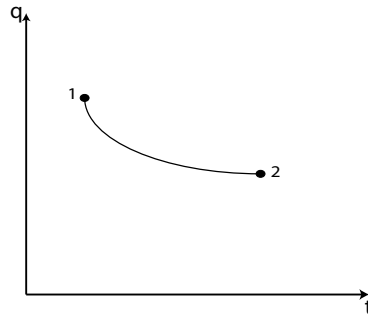


Abbildung 1.21: Brachistochrone: kürzeste Gleitzeit im Schwerfeld zwischen zwei Punkten

brachistos kürzeste; chronos Zeit (Johann Bernoulli 1696)

Die Minimierungsgröße ist also die Zeit $T[y] = \int dt = \int \frac{ds}{v}$

Eine solche Gleitschiene ist im Landesmuseum Mannheim ausgestellt.

4. Kettenlinie - welche Form $y(x)$ nimmt ein Seil der Länge L an, das im Schwerfeld zwischen zwei gegebenen Punkten aufgehängt wird? Im Gegensatz zu den Beispielen 1) - 3) gibt es jetzt neben der Minimierungsgröße $V[y]$ eine Nebenbedingung, nämlich die konstante Seillänge L .

5. Isoperimetrisches Problem: welche Kurve der Länge L umfasst den größten Flächeninhalt A ?

1 Lagrange-Mechanik

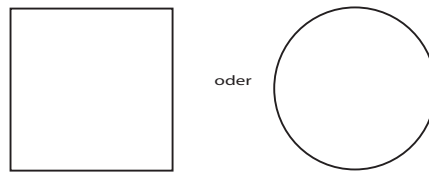


Abbildung 1.22: Welche Kurve erzeugt den größten Flächeninhalt? Vergleich Quadrat - Kreis.

Quadrat: $A = D^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$

Kreis: $A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$

Da $\pi < 4$, ist der Kreis besser. Ist er aber auch optimal?

In drei Dimensionen: welche Fläche mit Flächeninhalt A erzeugt das größte Volumen?

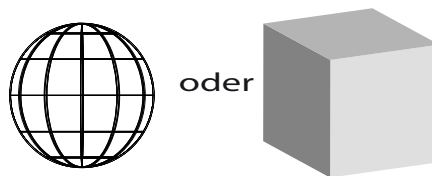


Abbildung 1.23: Welche Fläche erzeugt das größte Volumen? Vergleich Kugel - Würfel.

Quader: $V = D^3 = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,07A^{\frac{3}{2}}$

Kugel: $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,1A^{\frac{3}{2}}$

Die Kugel ist also besser. Ist sie aber auch optimal?

In beiden Fällen gibt es wieder eine Nebenbedingung (konstanter Umfang bzw. Fläche).

- 6. Geodätische Linien** - Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Fläche?



Abbildung 1.24: Die Geodäte ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der gegebenen Fläche, z.B. bei einer Wanderung im Gebirge

Nebenbedingung: implizit definierte Fläche durch $\phi(x, y, z) = 0$

Diese Nebenbedingung ist komplexer als in den Beispielen 4) und 5), da sie an jedem Punkt gilt.

Anwendung: Wanderung im Gebirge

Zweidimensionale Taylor-Entwicklung

Weiter unten benötigen wir die Taylor-Entwicklung in zwei Dimensionen. In einer Dimension lautet die Taylor-Reihe für eine Funktion $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

wobei wir kleine Abweichungen Δx um den Punkt x_0 betrachten und deshalb nur Terme bis zur zweiten Ordnung angegeben haben. Für ein Extremum muss der lineare Term verschwinden, d.h. die erste Ableitung muss gleich Null sein. Ob es ein Minimum, Maximum oder Sattel ist, muss man mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden.

Für eine zweidimensionale Funktion $f(x, y)$ kann ebenfalls eine Taylor-Reihe hergeleitet werden (Gegenstand der Analysis 2). Da es jetzt partielle Ableitungen in

1 Lagrange-Mechanik

x und y gibt, sind darin mehr Terme enthalten, aber die grundlegende Struktur ist ganz ähnlich wie in einer Dimension. Bis in zweite Ordnung findet man:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \dots \end{aligned}$$

Für ein Extremum müssen jetzt zwei lineare Terme gleichzeitig verschwinden:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (1.58)$$

Die Entscheidung über Minimum, Maximum oder Sattel liegt wieder an den Termen zweiter Ordnung. Allerdings taucht hier eine neue Art von Sattel auf, der nicht das Verschwinden der zweiten Ableitung erfordert: wenn die Fläche $f(x, y)$ am Extremum in die beiden Koordinatenrichtungen gegensätzlich gekrümmt ist, dann liegt ein Sattel in der Art eines Pferdesattels vor. Mathematisch bedeutet das, dass es in zwei Dimensionen mehr als eine Art von Krümmung gibt (mittlere und Gaußsche Krümmung).

Variation ohne Nebenbedingung

Wir versuchen, folgende Frage zu beantworten: welche Funktion $y(x)$ minimiert das Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y(x), y'(x), x) \quad (1.59)$$

wobei die Randpunkte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ festgehalten werden

Bemerkung wir betrachten vorerst keine Nebenbedingungen, das entspricht den Beispielen 1) - 3), aber nicht 4) - 6). Wir betrachten nur $F = F(y, y', x)$, nicht z.B. $F = F(y, y', y'', x)$. Die Randwerte $y(x_1)$ und $y(x_2)$ werden nicht variiert. Diese Einschränkungen können später aufgehoben werden, bei uns sind sie durch die Lagrange-Mechanik motiviert.

Für die stationäre Lösung $y(x)$ muss jede Abweichung $\delta y(x)$ zu einem größeren Wert $J[y + \delta y]$ führen. Um die Variation der Funktion auf eine Variation einer reellen Zahl zurückführen zu können, die wir aus der Analysis schon kennen, verwenden wir $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$, mit $\varepsilon \ll 1, \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ wobei die einzige Bedingung die wir an unsere "Testfunktion" $\eta(x)$ stellen Differenzierbarkeit ist. Das

1 Lagrange-Mechanik

Funktional $J[y + \varepsilon\eta]$ ist jetzt also eine Funktion von ε und wir können nach dem Minimum suchen. Wir verlangen also:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dJ[y + \varepsilon\eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= 0 \\
 J[y + \varepsilon\eta] &= \int_{x_1}^{x_2} dx F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \varepsilon\eta'(x) \right\} + O(\varepsilon^2) \\
 \left. \frac{dJ[y + \varepsilon\eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right\} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \eta(x) + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} = 0
 \end{aligned}$$

Wir haben hier zuerst eine zwei-dimensionale Taylor-Reihe bis zur ersten (linearen) Ordnung verwendet und dann die Tatsache, dass für ein Extremum beide linearen Terme verschwinden müssen. Dann haben wir eine partielle Integration verwendet. Der letzte Term mit der Stammfunktion verschwindet wegen der festgehaltenen Endpunkte, also wegen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Da $\eta(x)$ beliebig ist, muss die geschweifte Klammer verschwinden:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \tag{1.60}$$

Diese Grundgleichung der Variationsrechnung heißt *Euler-Lagrange-Gleichung*. Ausgeschrieben:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1.61}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist also eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für die gesuchte Funktion $y(x)$. Sie ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum (Minimum oder Maximum). Zu jedem Funktional gehört eine Euler-Lagrange-Gleichung. Umgekehrt kann man für viele Differentialgleichungen ein zugehöriges Funktional finden.

Kurzfassung der Herleitung:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\}}_{=0} \delta y
 \end{aligned}$$

Anwendung auf Lagrange-Mechanik: Wirkungsfunktional

Die grundlegende Variable ist jetzt die Zeit t , also $x \rightarrow t$. Die zu optimierende Funktion ist eine generalisierte Koordinate q , also $y(x) \rightarrow q(t)$.

Die Lösung $q(t)$ der Lagrange-Gleichung macht das *Wirkungsfunktional* extremal:

$$\boxed{S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)} \quad \text{Wirkungsfunktional} \quad (1.62)$$

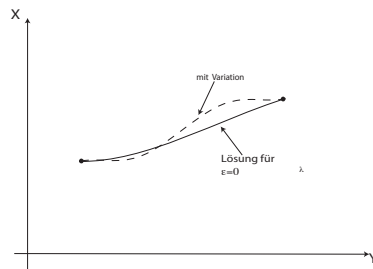


Abbildung 1.25: Hamiltonsches Prinzip: die tatsächliche Bewegung optimiert die Wirkung

Hamiltonsches Prinzip: Bei festem t_1 und t_2 und festem $q(t_1) = q_a$ und $q(t_2) = q_e$ erfolgt die Bewegung so, dass $S[q]$ extremal ist. Das Hamiltonsche Prinzip lässt sich leicht auf nicht-mechanische Systeme erweitern und ist ein Ausgangspunkt für statistische Mechanik und Quantenmechanik.

Zusammenfassend haben wir in der Lagrange-Mechanik also schon zwei mögliche Umformulierungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen kennengelernt:

$$\boxed{\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)} \quad \text{Wirkungsfunktional: Integralprinzip}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0} \quad \text{Lagrange-Gleichungen: differentielles Prinzip}$$

Alternative Herleitung

Man kann sich auch anhand der folgenden nicht rigorosen Herleitung veranschaulichen, wie aus der Minimierung des Wirkungsfunktional die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.

1 Lagrange-Mechanik

Im folgenden betrachten wir den eindimensionalen Fall, wobei wir die Lagrange-Funktion diskretisieren.

$$S = \int L dt = \sum_n L_n \Delta t \quad L = L(x(t), \dot{x}(t))$$

es herrscht also keine explizite Zeitabhängigkeit. Wenn wir nun auch $x(t)$ diskretisieren, erhalten wir $x(t) \rightarrow \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, $\dot{x}(t) \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$

$$\Rightarrow S = \sum L dt = \sum L\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}\right) \Delta t$$

Nun variieren wir die einzelnen Funktionswerte, z.B. x_8 . Die davon betroffenen Terme der Wirkung nennen wir S_8

$$S_8 = L\left(\frac{x_8 + x_9}{2}, \frac{x_9 - x_8}{\Delta t}\right) \Delta t + L\left(\frac{x_8 + x_7}{2}, \frac{x_8 - x_7}{\Delta t}\right) \Delta t$$

Variation von $\frac{S_8}{\Delta t}$ nach x_8 :

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{n=9} + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{n=8} + \left(-\frac{1}{\Delta t} \right) \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{n=9} + \left. \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{n=8} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \stackrel{!}{=} 0$$

Beispiele Variation ohne Nebenbedingungen

1. Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene

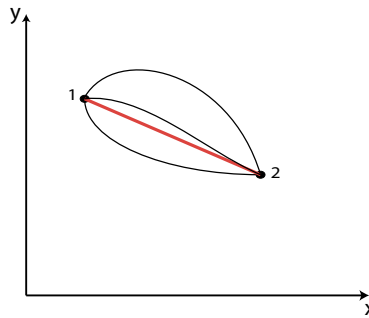


Abbildung 1.26: Die Geodäte in der Ebene ist eine Gerade.

1 Lagrange-Mechanik

$$\text{Bahnlänge } L = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2(x)}}_{F(y, y', x)}$$

Euler-Lagrange-Gleichung für $F(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}2y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \Rightarrow y' = \text{const.} = a$$

$\Rightarrow \boxed{y = ax + b}$ Die kürzeste Verbindung ist eine Gerade

2. Minimale Rotationsfläche

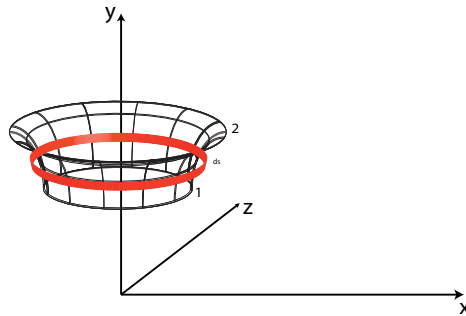


Abbildung 1.27: Welche Form hat eine Rotationsfläche mit minimalem Flächeninhalt ?

Welche hat minimalen Inhalt? Seifenfilm! Rotationssymmetrie $\rightarrow$ 1D-Problem

Differentieller Ring: $dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x dx \sqrt{1 + y'^2}$

$$\Rightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} dx 2\pi x \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y', x)} \quad (1.63)$$

1 Lagrange-Mechanik

Euler-Lagrange-Gleichung für $F(y, y', x) = x\sqrt{1 + y'^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}2y'x}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const} = a \\
 \Rightarrow y'^2 x^2 &= a^2(1 + y'^2) \Rightarrow y' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\
 \Rightarrow y &= a \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b \\
 \Rightarrow \boxed{x &= a \cosh\left(\frac{y - b}{a}\right)} \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

Für zwei Ringe oben und unten ergibt das genau das Katenoid. Die mathematische Funktion dahinter ist also der Kosinus Hyperbolicus.

- 3. Brachistochrone:** Auf welchem Weg gelangt ein gleitender Massenpunkt im Schwerfeld am schnellsten von $(x_1, 0)$ zu (x_2, y_2) ?

Geschwindigkeit v aus Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}v^2 - mgy = \frac{m}{2}v_1^2 - mgy_1 = 0 \tag{1.65}$$

Anfangsbedingungen: $v_1 = 0 \quad y_1 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

Gleitzeit:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{(x_1, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}}_{F(y, y', x)} \tag{1.66}$$

1 Lagrange-Mechanik

Euler-Lagrange-Gleichung für F:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}} \\
 \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \\
 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \\
 &= y' \left\{ \frac{-y'}{2y^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+y'^2}} \right\} + y'' \left\{ \frac{1}{y^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{y^{\frac{1}{2}} (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
 &= \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}} \quad | \cdot (-2)y^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+y'^2} \Rightarrow \quad 1+y'^2 = y'^2 - 2yy'' + \frac{2yy''}{(1+y'^2)} \\
 &\Rightarrow (1+2yy'')(1+y'^2) = 2yy'^2 y'' \\
 &\Rightarrow 1+2yy'^2 y'' + y'^2 + 2yy'' = 2yy'^2 y'' r \\
 &\Rightarrow \underbrace{y'(1+y'^2) + y(2y'y'')}_{\frac{d}{dx}(y(1+y'^2))} = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = a = \text{const} \quad (1.67)$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{a-y}{y} \Rightarrow \boxed{dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy} \quad (1.68)$$

Substitution: $y = a \sin^2 \varphi$

$$\begin{aligned}
 dy &= 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
 \Rightarrow x &= x_1 + \int_0^y dy \sqrt{\frac{y(a)}{a-y}} = x_1 + 2a \int_0^\varphi d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 &= x_1 + 2a \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\
 &= x_1 + a \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \\
 y &= a \sin^2 \varphi = \frac{a}{2} (1 - \cos 2\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= 2\varphi + \pi, \quad a = 2R, \quad x_1 = R\pi \\ \Rightarrow x &= 2R \left(\frac{\Psi - \pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(\Psi - \pi) \right) + R\pi \\ \Rightarrow x &= R\Psi + R\sin\Psi \\ y &= R(1 - \cos(\Psi - \pi)) \Rightarrow y = R(1 + \cos\Psi)\end{aligned}$$

Das sind genau die Formeln für eine Zykloide ! Anfangsbedingungen: $y = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \Psi = \pi$. Wir starten also genau mit der Spitze der Zykloide, im ersten Moment fällt das Teilchen also vertikal und nimmt dabei viel Geschwindigkeit auf. Dann gleitet es nach rechts, da es ja den rechten Punkt erreichen muss.

Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir diskutieren jetzt verschiedene wichtige Verallgemeinerungen der Euler-Lagrange-Gleichung, die im allgemeinen Fall auch miteinander kombiniert werden können.

- (1) Mehrere Funktionen: bisher hatten wir nur eine Funktion, also nur einen Freiheitsgrad, $S = 1$. Jetzt betrachten wir S Funktionen $y_1(x), \dots, y_s(x)$.

$$\Rightarrow F = F(y_1, \dots, y_s, y'_1, \dots, y'_s, x)$$

Achtung: Integral nach wie vor über x !

$$\begin{aligned}J(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_S) &= J[y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \dots, y_S + \varepsilon_S \eta_S] \text{ stationär bei } \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_S = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial J(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_S)}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} &= 0 \quad 1 \leq i \leq S \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} &= 0\end{aligned}$$

Das ist eine Euler-Lagrange-Gleichung für jede Komponente, also insgesamt ein System von S ODEs, $2S$ Anfangsbedingungen nötig zur Lösung. Das ist genau die allgemeine Situation in der analytischen Mechanik ! Wir bekommen also wieder das gleiche System von Bewegungsgleichungen wie zuvor.

- (2) Mehrere Argumente: sei $y = y(x_1, \dots, x_N)$

$$J[y] = \int dx_1 \dots \int dx_N \quad F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_N}, x_1, \dots, x_N\right)$$

Variation:

$$\begin{aligned}\delta y = \varepsilon \eta(x_1, \dots, x_N) &\Rightarrow J(\varepsilon) = J[y + \delta y] \\ &\Rightarrow \text{Funktion } J(\varepsilon) \text{ mit } \left. \frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_0} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial y}{\partial x_i})} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

In diesem Fall gibt es also nur eine Gleichung, aber jetzt handelt es sich nicht mehr um eine ODE (gewöhnliche Differentialgleichung), sondern um eine PDE (partielle Differentialgleichung). Eine wichtige Anwendung sind Funktionale für Flächen, die ja zwei interne Koordinaten haben. Das bekannteste Beispiel sind die Minimalflächen ohne Rotationssymmetrie, dann hat man ein wirklich zwei-dimensionales Problem.

- (3) Höhere Ableitungen: z.B. das Funktional $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', y'', x)$, also die Hinzunahme von zweiten Ableitungen (Krümmungen).

Die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\underbrace{0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''}}_{\text{ODE 4. Ordnung}} \quad (1.69)$$

Beispiel: PTP 1, Kapitel 1.4, Krümmungsenergie von Polymeren. Allgemein tauchen solche Probleme mit höheren Ableitungen typischerweise in der Elastizitätstheorie auf.

Variation mit Nebenbedingungen

Die obigen Beispiele [4.](#) - [6.](#) waren Variationen mit Nebenbedingungen. Wie geht man in diesem Fall vor?

Beispiel 4: Kettenlinie, also Seil im Schwerfeld zwischen zwei Aufhängepunkten. Minimiert wird die potentielle Energie

$$J[y] = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\rho ds}_{\text{Massenelement}} \quad gy = g\rho \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{y \sqrt{1 + y'^2}}_{F(y, y', x)} \quad (1.70)$$

Nebenbedingung: Seillänge L vorgegeben

$$L = K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_{G(y, y', x)} \quad (1.71)$$

Wie minimiert man $J[y]$ mit Nebenbedingung $K[y] = \text{const}$? Dafür betrachten wir erst den reellen Fall.

Minimierung mit Nebenbedingung für reelle Funktionen

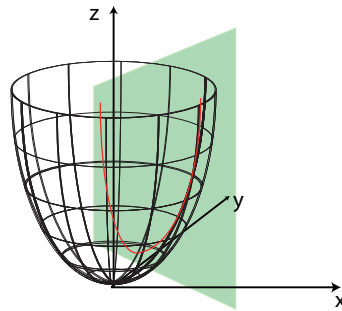


Abbildung 1.28: Eine parabolische Funktion hat ihr Minimum im Ursprung.

Wie findet man das Minimum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$?

Lösung durch Elimination: Auflösen der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ergibt eine Funktion $y_g(x)$. Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt eine ein-dimensionale Zielfunktion $h(x) = f(x, y_g(x))$. Minimierung:

$$\Rightarrow 0 = h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_g(x) \Rightarrow x_m \Rightarrow y_m = y_g(x_m) \quad (1.72)$$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$, Minimum bei $(0, 0)$. Nebenbedingung: $g(x, y) = y - 1 + x \Rightarrow y_g(x) = 1 - x \Rightarrow h(x) = x^2 + (1 - x)^2 \Rightarrow h'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x_m = 1/2 \Rightarrow y_m = 1/2$.

Problem: $g(x, y)$ lässt sich typischerweise nicht nach $y_g(x)$ auflösen!

Lösung: Einführung eines *Lagrange-Parameters* λ

Wir betrachten $\bar{f}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ und minimieren nach allen drei Variablen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} = g \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Wir denken uns $y_g(x)$ als bekannt und ersetzen $g(x, y)$ durch die äquivalente Nebenbedingung $\bar{g}(x, y) = y - y_g(x)$. Dies entspricht einer Linearisierung der Nebenbedingung, ändert aber nichts an ihren Nullstellen (nur die sind relevant). Dann gilt:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda y'_g(x) \\ 0 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_g = 0 \quad (1.73)$$

Zusammen mit der dritten Gleichung $g = 0$ erhalten wir also genau die gleichen Ergebnisse wie bei Elimination. Die Minimierung mit Lagrange-Parameter ist also äquivalent zur Minimierung durch Elimination. Dabei kommt zwar ein neuer Parameter λ ins Spiel, der wird aber am Schluss durch $g = 0$ bestimmt. Der Vorteil besteht darin, dass wir nicht explizit auflösen müssen. Achtung: $g = 0$ wird erst am Ende verwendet, um λ zu bestimmen, sonst würde man von Anfang an nur Null addieren.

Anwendung auf das einfache Beispiel

$$\bar{f} = f + \lambda g = x^2 + y^2 + \lambda(y - 1 + x)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} &= 2x + \lambda \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} &= 2y + \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = -\frac{\lambda}{2} \quad (1.74)$$

λ eliminieren durch Nebenbedingung: $0 = g(x, y) = -\lambda - 1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow x_m = y_m = \frac{1}{2}$

Minimierung mit Nebenbedingung für Funktionale

Bei der üblichen Variation $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$ wird in der Regel die Nebenbedingung verletzt. Deshalb verwenden wir jetzt die Variation $\delta y(x) = \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$. Zusammen können diese 2 Variationen die Nebenbedingung erfüllen. Das Zielfunktional $J[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2] = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entspricht einer Fläche über der $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -Ebene. Die Nebenbedingung $K[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2] = L = \text{const} = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entspricht einer Kurve in der $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -Ebene. Damit haben wir genau die Situation der Minimierung mit Nebenbedingung für eine reelle zwei-dimensionale Funktion. Wir lösen das Problem mit der Methode der Lagrange-Parameter.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Minimiere } & J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - L) \\ \Rightarrow \frac{\partial(J + \lambda K)}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} &= 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \end{aligned}$$

ε_1 und ε_2 haben symmetrische Funktionen und führen deshalb auf die gleiche Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad \text{mit } \bar{F} = F + \lambda G$$

1 Lagrange-Mechanik

Das ergibt eine Lösung $y(x, \lambda)$, dann kann λ festgelegt werden durch die Nebenbedingung.

Anwendung auf Kettenlinie

$$\bar{F} = F + \lambda G = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \quad (1.75)$$

$$= (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} = \bar{F}(y, y') \quad (1.76)$$

Diese Funktion hängt von x nur implizit ab. Daraus folgt eine Erhaltungsgröße.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{d\bar{F}}{dx} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y'' \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' \right) &= \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right)}_{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}} y' + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y'' = \frac{d\bar{F}}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \underbrace{\left(\bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' \right)}_{=\text{const}=a} &= 0 \\ a = \bar{F} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} y' &= (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2} - \frac{(y + \lambda)y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ &= (y + \lambda) \left(\frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ \Rightarrow y'^2 &= \frac{(y + \lambda)^2}{a^2} - 1 \end{aligned}$$

Einfache Überlegung: λ und a können rausskaliert werden, die Grundstruktur der Gleichung lautet also $y'^2 = y^2 - 1$. Das wird durch $\cosh(x)$ gelöst:

$$y = \cosh(x) \Rightarrow y' = \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

1 Lagrange-Mechanik

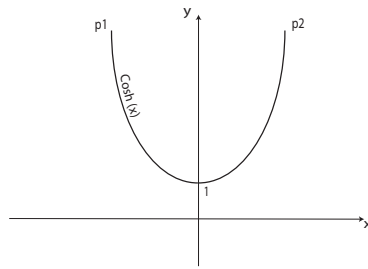


Abbildung 1.29: Die Kettenlinie hat die Form eines Kosinus Hyperbolicus.

Vollständige Lösung:

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) - \lambda} \quad (1.77)$$

Die Parameter a , b und λ müssen aus Neben- und Randbedingungen bestimmt werden. Die Form der Kettenlinie ist ein Kosinus Hyperbolicus. Die gleiche Funktion hatten wir schon bei der minimalen Rotationsfläche gefunden. Ihr exponentieller Charakter führt zu einer starken Krümmung nach innen bzw. unten: bei der Minimalfläche soll möglichst viel Fläche innen an der Drehachse liegen, bei der Kettenlinie möglichst viel Länge unten im Gravitationspotential.

Wir lösen das Problem jetzt für konkrete Aufhängepunkte $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Die Spiegelsymmetrie um $x = 0$ führt zu $b = 0$. λ folgt aus der Forderung an den Aufhängepunkte:

$$x = 1 \Rightarrow \lambda = a \cosh \frac{1}{a} \Rightarrow y(x) = a \left[\cosh \frac{x}{a} - \cosh \frac{1}{a} \right]$$

Jetzt ist noch a offen, das die Länge der Kette bestimmt.

1 Lagrange-Mechanik

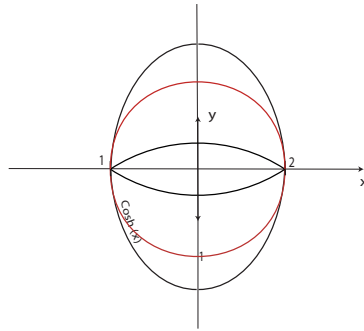


Abbildung 1.30: Die Kettenlinie bei Variation des Parameters a .

Berechnung der Länge:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{-1}^1 dx \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\
 &= a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-1}^1 = 2a \sinh \frac{1}{a} \Rightarrow a = a(L)
 \end{aligned}$$

Diese Beziehung löst man am einfachsten graphisch. Für jedes gegebene L gibt es zwei Lösungen $\pm a_0$. Die positive Lösung entspricht dem gesuchten Seil, das nach unten hängt. Die negative Lösung entspricht einem Seil, das seine potentielle Energie maximiert. Diese Lösungen haben wir nicht gesucht, aber sie hat eine interessante Anwendung in der Architektur: da in diesem Problem die Gewichtskräfte ausschließlich durch Spannungen in der Linie kompensiert werden, ist diese die optimale Form für einen Torbogen, der die Gewichtskraft des Materials ausschließlich in Kompressionskräfte im Bogen umsetzt (also zum Beispiel keine Scher- oder Biegekräfte erzeugt, die das Material stärker belasten würden).

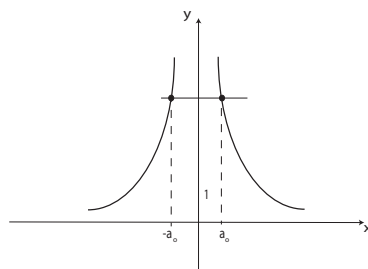


Abbildung 1.31: Graphische Lösung der Beziehung $L(a)$.

Beispiel 5: Das isoperimetrische Problem ist vom gleichen Typ wie Beispiel 4.

Beispiel 6: Geodätische Linien

Wir betrachten eine Kurve in drei Dimensionen parametrisiert durch die Zeit t :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten entspricht in dieser Parametrisierung der Minimierung des Funktional

$$J[x, y, z] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1.79)$$

Dies ist die Verallgemeinerung von $J = \int dx \sqrt{1 + y'^2}$ in der Ebene bei Parametrisierung durch x . Da wir jetzt drei Funktionen haben, ergeben sich drei Euler-Lagrange-Gleichungen.

Wir suchen die kürzeste Verbindung unter der Nebenbedingung, dass die Kurve auf einer gegebenen Fläche verläuft. Diese Fläche wird definiert durch $g(x, y, z) = 0$.

Beispiel Höhenfunktion: $\underbrace{z - h(x, y)}_{g(x, y, z)} = 0$. Diese Nebenbedingung gilt an jeder Stelle

t und ist damit eine viel stärkere Einschränkung als bisher, wo wir es nur mit Integralbedingungen zu tun hatten.

Lösung: ein Lagrange-Parameter λ_t für jedes t .

$\Rightarrow$ Lagrange-Funktion $\lambda(t)$

$\Rightarrow$ neues Zielfunktional $\bar{F} = F + \lambda(t)g(x, y, z)$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung für $x(t)$ (analog für $(y(t), z(t))$)

Euler-Lagrange-Gleichung für $x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) &= 0 \\ F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} &= v \quad \text{Geschwindigkeit} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{v} - \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Parametrisierung durch die Bogenlänge: $s = s(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{ds}{dt} &= v, \frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = v \frac{dx}{ds} = vx', \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{ds} = v \frac{d^2x}{ds^2} = vx'' \\ \Rightarrow \boxed{x'' &= \frac{\lambda(t)}{v(t)} \frac{\partial g}{\partial x}} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Beispiel: Kugel

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ \Rightarrow x'' &= 2 \underbrace{\frac{\lambda(t)}{v(t)}}_{=: \mu(t)} x \end{aligned}$$

Zweimaliges Differenzieren von g:

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{x'^2 + y'^2 + z'^2}_{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}=1} + \underbrace{xx'' + yy'' + zz''}_{\text{Euler-Lagrange-Gleichung einsetzen}} \\ \Rightarrow 0 &= 1 + \mu \left(x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 1 + 2\mu R^2 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{-1}{2R^2} = \text{const} \\ \Rightarrow \boxed{x'' + \frac{x}{R^2} &= 0} \end{aligned} \quad (1.81)$$

Wir haben also den harmonischen Oszillator gefunden. Die geometrische Nebenbedingung führt bei der Rechnung in kartesischen Koordinaten also zu linearen Kräften.

Insgesamt haben wir ein System von drei ODEs. Hier sind die Gleichungen für x , y und z entkoppelt. Die Lösung ist also

$$x(t) = A \sin\left(\frac{s}{R}\right) + B \cos\left(\frac{s}{R}\right) \quad (1.82)$$

und analog für y und z . Wir legen die Kugel so, dass $z = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \frac{s}{R} \\ R \cos \frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist genau die Gleichung für einen Kreis. $\Rightarrow$ Die Geodätischen auf der Kugel sind die *Großkreise*.

Dieses Beispiel zeigt die enge Kopplung von Geometrie und Kräften in der Physik. Hier führte die Geometrie zu bestimmten Kräften; umgekehrt kann man Kräfte auch als geometrische Bedingungen umformulieren (z.B. in der Allgemeinen Relativitätstheorie).

1.5 Hamiltonsches Prinzip

Wir haben oben schon gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen auch als die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung für das Wirkungsfunktional betrachtet werden können. Daraus folgt das Hamiltonsche Prinzip (oder *Prinzip der kleinsten Wirkung*): die Bewegung $\mathbf{q}(t)$ erfolgt so, dass $S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ stationär ist $\Rightarrow \delta S = 0$.

Herleitung aus dem D'Alembertschen Prinzip

Wir beginnen wieder mit einer Projektion auf die virtuelle Verrückung $\delta \mathbf{r}$, also auf eine Variation ohne explizite Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_i &= \mathbf{K}_i + \mathbf{Z}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \Big| \cdot \delta \mathbf{r}_i \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \delta \mathbf{r}_i}_{=\delta W=0} &= 0 \\
 \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) - \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i}_{\frac{1}{2} \delta(\dot{\mathbf{r}}_i^2)} \\
 \mathbf{K}_i &= -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\
 \Rightarrow 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left\{ \underbrace{\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i)}_{=0} - \underbrace{\frac{m_i}{2} \delta(\dot{\mathbf{r}}_i^2)}_{-\delta T} - \underbrace{(-\nabla_i V) \delta \mathbf{r}_i}_{-\delta V} \right\} \\
 \Rightarrow 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \underbrace{(T - V)}_{=L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta S
 \end{aligned}$$

Das $\delta \mathbf{r}$ der virtuellen Verrückung entspricht also am Ende dem δS der Variationsrechnung.

Mechanik à la Landau-Lifschitz

Für das Aufstellen von Bewegungsgleichungen verwendet man in der Regel die Lagrange-Gleichungen. Das Hamiltonsche Prinzip dagegen ist der übliche Ausgangspunkt für allgemeine Betrachtungen (Symmetrie-Überlegungen, Aufstellen neuer Theorien). Manche Lehrbücher wie der Landau-Lifschitz stellen das Hamiltonsche Prinzip sogar als Axiom an den Anfang der Mechanik. Das wollen wir hier kurz skizzieren.

Wir nehmen an, dass eine Funktion L existiert, so dass $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$ bei der Bewegung minimiert wird. Wie sieht L für ein freies Teilchen aus?

- 1) Mechanische Bewegung ist durch Anfangsposition und Geschwindigkeit bestimmt $\Rightarrow L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$
- 2) Die Zeit ist homogen $\Rightarrow L$ darf nicht explizit von t abhängen
- 3) Der Raum ist homogen $\Rightarrow L$ darf nicht explizit von $\mathbf{q}$ abhängen
- 4) Der Raum ist isotrop $\Rightarrow L$ darf nicht von der Richtung von $\dot{\mathbf{q}}$ abhängen

Einfachste Möglichkeit $L = C\dot{\mathbf{q}}^2$. Die Konstante C wird gleich $C = \frac{m}{2}$ gesetzt $\Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 = T$. Mehrteilchensysteme: Erweiterung um eine skalare Funktion, $L = \bar{L} - U$, so dass U die instantane Wechselwirkung zwischen den Teilchen widerspiegelt und deshalb nur von den Koordinaten anhängen darf. Die Funktionalvariation führt dann auf $m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U$. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgen also aus ganz allgemeinen Symmetrieüberlegungen und bilden somit nicht die Grundlage der Mechanik, sondern eine Folgerung. Kräfte werden nicht über die Alltagserfahrung definiert, sondern als Ableitungen von Potentialen.

(Eich)Transformationen und Symmetrien

Wie schon bei der Einführung der Lagrangefunktion angemerkt wurde gibt es eine Vielzahl an Transformationen, unter denen die Physik invariant bleibt. Ein Beispiel für eine solche Transformation wären die Punkttransformationen $(q_1, \dots, q_S) \rightarrow (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S)$, $\bar{L} = L(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dots)$, unter denen die Lagrangefunktion invariant ist, wie wir bereits gezeigt hatten.

Da das Prinzip der stationären Wirkung über die Nullstellen einer Funktionalableitung gegeben ist kann somit auch eine beliebige Konstante und ein beliebiger Vorfaktor an die Lagrangefunktion gehängt werden, $L \rightarrow AL + c$. Die nützlichste Transformationsgruppe unter der Bewegungsgleichungen unverändert bleiben

1 Lagrange-Mechanik

bilden die sogenannten *Eichtransformationen*:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \underbrace{\frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, t)}_{=:L_f} \quad (1.83)$$

Beweis:

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L^* \quad (1.84)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt L + \underbrace{f(\mathbf{q}(t_2), t_2) - f(\mathbf{q}(t_1), t_1)}_{\text{konstant, verschwindet bei Variation}} \quad (1.85)$$

$$\Rightarrow \delta S^* = \delta S \quad (1.86)$$

Die Herleitung auf der Ebene der Bewegungsgleichungen ist deutlich komplizierter:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_f}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{l=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l \right\} \quad (1.87)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} + \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l = \frac{\partial}{\partial q_j} L_f \quad (1.88)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L_f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_f}{\partial q_j} = 0} \quad (1.89)$$

Der Beitrag von L_f hebt sich in den Bewegungsgleichungen heraus.

Beispiele

1. Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &\rightarrow \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v} = \text{const.} \\ L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 &\rightarrow L^* = L + \underbrace{m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m}{2} \mathbf{v}^2}_{\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 t)} \end{aligned}$$

Die Galilei-Transformation entspricht also einer Eichtransformation und ändert deshalb die Bewegungsgleichungen nicht.

2. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentz-Kraft: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow$ Die Lagrange-Gleichungen für konservative Systeme gelten nicht wegen der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

1 Lagrange-Mechanik

Wir gehen zurück zum Fall holonomer Zwangsbedingungen ohne die Annahme konservativer Kräfte:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = Q_j \text{ verallgemeinerter Kraftkomponente}$$

Elektromagnetische Potentiale aus den Maxwell-Gleichungen:

a) $\varphi(\mathbf{r}, t)$ skalares Potential

b) $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ Vektorpotential

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.90)$$

Verallgemeinertes Potential: $U = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$

$$\text{Verallgemeinerte Lagrange-Funktion: } L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - q\varphi$$

$$\text{Verallgemeinerte Kraftkomponente: } Q_j := \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Entspricht Q_j der Lorentz-Kraft? Beweis für x-Komponente

$$U = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (1.91)$$

$$\Rightarrow Q_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = q \left\{ \frac{d}{dt} (-A_x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right\} \quad (1.92)$$

$$\text{Lorentz-Kraft: } F_x = q(E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x) \quad (1.93)$$

$$= q \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x \right\} \quad (1.94)$$

$$(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (1.95)$$

$$= \underbrace{\dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})} - \underbrace{\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z}}_{-\frac{d}{dt} A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}} \quad (1.96)$$

$$\Rightarrow F_x = q \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right\} = Q_x \quad (1.97)$$

1 Lagrange-Mechanik

Die oben gemachten Definitionen führen also tatsächlich über die Lagrange-Gleichungen zu den richtigen Bewegungsgleichungen. Damit ist gezeigt, wie der Lagrange-Formalismus auch auf den nicht-mechanischen und nicht-konservativen Fall des Elektromagnetismus übertragen werden kann.

Wie sehen in diesem Fall mögliche Eichtransformationen aus? Wir betrachten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$. Dann gilt

$$L \rightarrow L^* = L + q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}) = L + q \frac{d\chi}{dt} \quad (1.98)$$

Physikalisch ergibt dies Sinn, da nur $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder beobachtet werden können, nicht aber die Potentiale. Eine schnelle Rechnung zeigt, dass diese Potentialeichung die Felder tatsächlich unverändert lässt:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}} &= \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \checkmark \\ \tilde{\mathbf{E}} &= -\nabla(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\phi + \nabla\chi) = -\nabla\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} = \mathbf{E} \quad \checkmark\end{aligned}$$

In praktischen Anwendungen kann die geschickte Wahl von Eichtransformationen zur analytischen Lösung des Problems führen.

1.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Lagrange-Gleichungen für holonome und konservative Systeme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (1.99)$$

führen für eine *zyklische Variable* direkt auf einen Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} =: p_j \quad (1.100)$$

Die Erhaltungsgröße p_j heißt der *generalisierte Impuls*. Sie folgt aus einer Symmetrie, nämlich der Invarianz unter einer generalisierten Verschiebung. Generell gilt: aus jeder Symmetrie folgt eine Erhaltungsgröße.

Wir betrachten im folgenden drei fundamentale Symmetrien, die für die meisten physikalischen Systeme gelten (falls nicht, kann dies in der Regel korrigiert werden, indem das System größer gewählt wird).

Homogenität der Zeit

Physikalische Systeme sind in der Regel invariant unter Zeittranslation. In der Mechanik äußert sich das darin, dass eine Trajektorie $\mathbf{q}(t)$ nur von $\mathbf{q}(t_A)$ abhängt, aber nicht von t_A . In der Lagrange-Funktion äußert sich das darin, dass es keine explizite Zeitabhängigkeit gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L}_{=:H} \right) \end{aligned} \quad (1.101)$$

Es folgt also die Erhaltung der *Hamilton-Funktion* $H = H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.
Skleronome Zwangsbedingungen: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q})$, $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.102)$$

$$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l \quad (1.103)$$

In diesem Fall gibt es also nur quadratische Terme in $\dot{q}_j \Rightarrow T$ ist eine homogene Funktion vom Grad 2 in den generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} T(\alpha \dot{\mathbf{q}}) &= \alpha^2 T(\dot{\mathbf{q}}) \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial (\alpha \dot{q}_j)} \dot{q}_j = 2\alpha T \\ \stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} 2T &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \stackrel{\text{konserv. Syst.}}{=} \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j \\ \Rightarrow H &= \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V = E \end{aligned} \quad (1.104)$$

Für konservative Systeme mit skleronomen Zwangsbedingungen ist die Hamilton-Funktion H genau die Gesamtenergie $E \Rightarrow$ Die Homogenität der Zeit bedingt

1 Lagrange-Mechanik

Energieerhaltung. Für rheonome Systeme ist zwar die Hamilton-Funktion erhalten, aber nicht die Gesamtenergie. In diesem Fall leisten die Zwangskräfte richtige Arbeit und ändern so den Energiegehalt des Systems.

Die Hamilton-Funktion H ist in der Physik genauso wichtig wie die Lagrange-Funktion L . Tatsächlich sind die beiden zueinander äquivalent. Mathematisch ist H nämlich die Legendre-Transformierte von $-L$. Die Legendre-Transformation ist die Umschreibung einer Funktion nach ihrer Ableitung, also hier der Lagrange-Funktion nach ihrer Ableitung nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, was die verallgemeinerten Impulse sind. Die Legendre-Funktion kommt auch in der Thermodynamik vor bei Wechsel zwischen verschiedenen Ensembles und ist für die Physik eine ähnliche wichtige Transformation wie die von Fourier oder Laplace.

Beispiel Perle auf rotierendem Draht

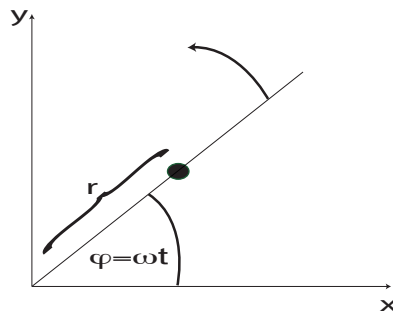


Abbildung 1.32: Perle auf rotierendem Draht

Rheonome Zwangsbedingungen: $\frac{y}{x} = \tan(\omega t)$, $q = r$

$$L = T = E = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - q^2\omega^2) \neq E$$

Exakte Lösung für $q(0) = r_0$, $\dot{q}(0) = 0$

$q(t) = r_0 \cosh(\omega t)$ wächst exponentiell in der Zeit an

$E = m\omega^2 q^2 - \frac{m}{2}r_0^2\omega^2$ wächst ebenfalls exponentiell in der Zeit an

$$H = \frac{m}{2}r_0^2\omega^2(\sinh^2(\omega t) - \cosh^2(\omega t)) = -\frac{m}{2}r_0^2\omega^2 = \text{const} \leftarrow \text{Erhaltungsgröße!}$$

Homogenität des Raumes

Da Potentiale immer nur vom relativen Abstand von Objekten abhängen, also $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, sind physikalische Systeme invariant unter Verschiebung im Raum. Wir betrachten diese Verschiebung als zyklische Variable durch geeignete Wahl des Koordinatensystems $\Rightarrow q_j$ beschreibe die Verschiebung um $\underbrace{\Delta q_j}_{\text{Betrag}} \underbrace{\mathbf{n}}_{\text{Richtung}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const.}$$

Konservatives System: $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \text{const}$$

Der Gesamtimpuls $\mathbf{P}$ projiziert auf die Verschiebungsrichtung $\mathbf{n}$ ist erhalten. Im allgemeinen ist $\mathbf{n}$ beliebig $\Rightarrow \mathbf{P}$ erhalten. $\Rightarrow$ Aus der Homogenität des Raumes folgt Impulserhaltung.

Isotropie des Raumes

Physikalische Systeme sind invariant unter Drehungen im Raum. Wahl einer Variablen q_j derart, dass Δq_j einer Drehung entspricht, mit Winkel $\Delta \varphi = \Delta q_j$ um eine Drehachse $\mathbf{n}$.

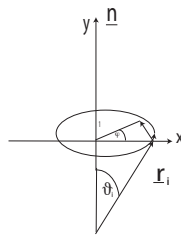


Abbildung 1.33: Bei einer Drehung ist nur der Teil des Ortsvektors relevant, der senkrecht auf die Drehachse steht.

1 Lagrange-Mechanik

$$|\Delta \mathbf{r}_i| = \Delta \varphi |\mathbf{r}_i| \sin \vartheta_i \quad \Delta \mathbf{r}_i \perp \mathbf{r}_i, \Delta \mathbf{r}_i \perp \mathbf{n} \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{r}_i = \Delta q_j (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i)$$

Das selbe Ergebnis folgt aus der Betrachtung über Drehmatrizen, hier exemplarisch für Drehungen um die z-Achse

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi \text{ klein}} \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r} + (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) d\varphi \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{r}_i = \Delta q_j (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i)$$

q_j ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i)} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{r}}_i))}_{\mathbf{L} = \text{Gesamtdrehimpuls}} \end{aligned}$$

wobei wir im Spatprodukt die Vektoren zyklisch vertauscht haben. Im allgemeinen ist $\mathbf{n}$ beliebig $\Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Aus der Isotropie des Raumes folgt die Gesamtdrehimpulserhaltung.

Noether-Theorem

Das Theorem lautet: *Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie in der Lagrange-Funktion L gibt es eine Erhaltungsgröße.* Dieser Zusammenhang ist für die Physik von fundamentaler Bedeutung. In der Teilchenphysik zum Beispiel werden durch Streuung gefundene Erhaltungsgrößen wie der Isospin in entsprechend symmetrisierte Theorien umgesetzt (dafür benötigt man aus der Mathematik die Gruppentheorie). Dieses Theorem wurde 1918 von Emmy Noether aufgestellt, die später die erste Physikprofessorin in Deutschland wurde. Sie musste im dritten Reich emigrieren und wurde dann Professorin in den USA. Heute ist das Nachwuchsgruppenleiterprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) zu ihren Ehren benannt.

Beweis:

Sei $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha)$ eine Schar von Raumkurven mit der Referenzlösung $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}(t)$. Es gelte Invarianz der Lagrange-Funktion unter Variation in α , d.h.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t) &= L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \\ \Rightarrow 0 &= \left. \frac{dL(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{j=1}^S \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)}_{=0} \left. \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}}_{\text{Erhaltungsgröße}} \end{aligned}$$

Beispiele

1. Translation im Raum

Kartesische Koordinaten: $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, $S = 3N$, Translation: $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}$.

$$\text{const} = \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}}_{m_i \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}}_{=\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (1.105)$$

Es folgt also wie erwartet Impulserhaltung in Richtung der Translationsinvarianz.

Der Beweis für Drehungen erfolgt analog. Für Translation in der Zeit muss der Beweis leicht modifiziert werden, da die Zeit keine räumliche Koordinate ist. Die Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls sind die drei wichtigsten Erhaltungsgrößen, die aus dem Noether-Theorem folgen.

2. Drehungen im Raum

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \Rightarrow \text{const.} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}$$

3. Zeittranslationsinvarianz

$$\mathbf{q}(t, \alpha) = \mathbf{q}(t + \alpha)$$

L ist zwar nicht invariant bezüglich dieser Darstellung, aber es gilt

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L$$

Deshalb ist die Erhaltungsgröße

$$\text{const.} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = H$$

die Hamiltonfunktion

1.7 Reibungskräfte

Bisher haben wir Systeme betrachtet, die holonom und konservativ sind. Im folgenden wollen wir jede dieser Bedingungen für sich aufheben. Wir beginnen mit der Bedingung, dass das System konservativ ist. Als Beispiel verwenden wir den praktisch wichtigen Fall von Reibungskräften.

Systeme mit Reibungskräften sind nicht konservativ, d.h. es gibt keine (verallgemeinerte) Potentiale. Wir betrachten also holonome, aber nicht konservative Systeme und gehen zur Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem d'Alembertschen Prinzip zurück. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j = \underbrace{Q_j^V}_{\text{konservativ}} + \underbrace{Q_j^R}_{\text{dissipativ}} \quad (1.106)$$

Wir unterscheiden also zwischen verallgemeinerten Kraftkomponenten, die aus einem Potential (V) und die aus Reibung (R) entstehen. Wir behandeln nur den einfachsten Fall, nämlich Stokessche Reibung, d.h. jedes Teilchen i erfährt eine Reibungskraft $\mathbf{K}_i^R$ proportional zu seiner Geschwindigkeit, mit einem Reibungskoeffizienten γ_i .

1 Lagrange-Mechanik

effizienten γ_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^R &= -\gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ \Rightarrow Q_j^R &= \sum_{i=1}^N (-\gamma_i \dot{\mathbf{r}}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (-\gamma_i) \left(\sum_{l=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{l=1}^S \underbrace{\sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}}_{\beta_{jl}} \dot{q}_l \\ \Rightarrow \boxed{Q_j^R = - \sum_{l=1}^S \beta_{jl} \dot{q}_l} & \text{ lineare Kraft} \end{aligned} \quad (1.107)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^R = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{l,n=1}^S \beta_{ln} \dot{q}_l \dot{q}_n \right)}_{=:D} \quad (1.108)$$

wobei D die *Rayleighsche Dissipationsfunktion* ist. Damit haben wir eine modifizierte Lagrange-Gleichung für Stokes-Reibung hergeleitet:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0} \quad (1.109)$$

Für Reibungskräfte braucht man also zwei skalare Funktionen L und D . Die Matrix

$$\beta_{lm} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_m} = \beta_{ml} \quad (1.110)$$

ist symmetrisch und damit gilt $D \geq 0$ (semi-definite quadratische Form).

Wir berechnen jetzt die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = \frac{dV}{dt} + \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right)}_{2T} - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\substack{= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}}} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (1.112)$$

Die erste Umformung gilt für skleronome Zwangsbedingungen, dann ist T homogen vom Grad 2.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt} (2T) - \underbrace{\sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j}_{2D} \quad (1.113)$$

Im letzten Term verwenden wir, dass D homogen ist vom Grad 2.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \underbrace{\sum_{j=1}^S \frac{\partial \overbrace{(T-L)}^V}{\partial q_j}}_{\frac{dV}{dt}} \dot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T) + 2D \quad (1.114)$$

$$= 2\frac{E}{t} + 2D \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -2D \leq 0} \quad (1.115)$$

Die Gesamtenergie sinkt also aufgrund der Reibung, und zwar bis das Gleichgewicht erreicht ist, also alle Teilchen zur Ruhe gekommen sind (ohne Geschwindigkeiten gibt es auch keine Reibung mehr). Wenn die Reibung klein ist, kann das allerdings sehr lange dauern. Ohne Reibung gilt $D = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$, es gilt Energieerhaltung wie oben schon gezeigt (immer unter der Voraussetzung skleronomer Zwangsbedingungen).

1.8 Nicht-holonome Systeme und Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir haben für die Lösung physikalischer Systeme bisher zwei Lösungsstrategien kennengelernt:

1. explizite Lösung, Lagrange-Methode 1.Art

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{Z}_i \quad 1 \leq i \leq N$$

Dafür werden die Zwangsbedingungen der Form $f_\nu(\mathbf{r}, t) = 0 \quad 1 \leq \nu \leq p$ verwendet

2. Lösung im Tangentialraum Ω_t , Lagrange-Methode 2.Art

Bei dieser Betrachtung fallen die Zwangskräfte raus, können aber ggf. im Nachhinein über $\mathbf{Z}_i = m\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i$ berechnet werden. Für diese Methode benötigen wir nur noch $S = 3N - p$ generalisierte Koordinaten $q_i \quad 1 \leq i \leq S$. Die Bewegungsgleichungen sind jetzt die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Beispiel Atwoodsche Fallmaschine

$$z_1 = z_2 = y_1 = y_2 = 0 \quad x_1 + x_2 - l = 0 \quad S = 6 - 5 = 1$$

$$\text{Lagrange 2.Art: } q = x_1, \quad L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2)gq$$

$$\stackrel{EL}{\Rightarrow} (m_1 - m_2)\ddot{q} - (m_1 - m_2)g = 0 \Rightarrow \ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad \text{freier Fall}$$

$$\text{Lagrange 1.Art: } m_1\ddot{x}_1 = m_1g + Z_1, \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2g + Z_2$$

actio=reactio $\Rightarrow Z_1 = Z_2 = Z$. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert das selbe Ergebnis wie bei der Lagrange-Methode 2.Art. Durch Addition erhalten wir die Zwangskraft $Z = -2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g$

Bisher haben wir hauptsächlich die Lagrange-Methode 2.Art diskutiert, was in vielen Fällen, wie zum Beispiel bei der Fallmaschine auch der richtige Ansatz ist, da wir dort holonome Zwangsbedingungen haben. Sobald ein System allerdings nicht mehr holonom ist brauchen wir die Lagrange-Methode 1.Art. Auch damit ist nicht garantiert, dass man eine Lösung des Systems auf einfache Weise finden kann, für manche Unterklassen an nicht-holonomen Problemen kann man jedoch wieder eine allgemeine Lösungsstrategie formulieren, so z.B. bei Problemen mit *differentiellen Zwangsbedingungen*:

Wir gehen davon aus, dass das System ggf. schon auf S Freiheitsgrade q_j reduziert wurde, falls dafür geeignete Zwangsbedingungen vorliegen. Dann betrachten wir zusätzlich differentielle Zwangsbedingungen, die in linearisierter Form vorliegen:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij}dq_j + b_i dt = 0 \quad 1 \leq i \leq p \quad (1.116)$$

Diese S Freiheitsgrade sind also nicht unabhängig voneinander, wir müssen also eine Variation unter Nebenbedingungen durchführen. Für virtuelle Verrückung ($\delta t = 0$) gilt:

$$\sum_{j=1}^S a_{ij}\delta q_j = 0$$

1 Lagrange-Mechanik

Wir berücksichtigen die differentiellen Zwangsbedingungen durch Einführung von p Lagrange-Parametern:

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} \right\} \delta q_j = 0 \quad (1.117)$$

Wie in der Variationsrechnung begründet, wird jede Zwangsbedingung additiv mit einem Lagrange-Parameter angefügt. Wegen der Abhängigkeit der Variablen ist die Summe essentiell. Wir wählen unsere generalisierten Koordinaten so dass:

$$\begin{aligned} q_j \text{ mit } 1 \leq j \leq S-p & \quad \text{unabhängig} \\ q_j \text{ mit } S-p+1 \leq j \leq S & \quad \text{abhängig} \end{aligned}$$

Die p Lagrange-Parameter werden jetzt so gewählt, dass für die abhängigen Variablen die geschweiften Klammern verschwinden. Die unabhängigen Variablen können dann getrennt variiert werden $\Rightarrow$ Summe unnötig $\Rightarrow$ geschweiften Klammern verschwinden in jedem Fall. Damit gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij} = Q_j} \quad (1.118)$$

Das sind die *Lagrange-Gleichungen der 1. Art*. Die differentiellen Zwangsbedingungen führen zu verallgemeinerten Zwangskräften Q_j . Insgesamt handelt es sich um S Gleichungen für $S+p$ Variablen (S Koordinaten q_j und p Lagrange-Multiplikatoren λ_i). Die p fehlenden Gleichungen sind die Zwangsbedingungen:

$$\boxed{\sum_{j=1}^S a_{ij} \dot{q}_j + b_i = 0} \quad (1.119)$$

Beispiele

1. Atwoodsche Fallmaschine

1 Lagrange-Mechanik

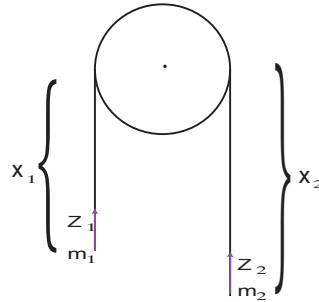


Abbildung 1.34: Die Atwoodsche Fallmaschine kann auch mit der Lagrange Methode der 1. Art behandelt werden.

Hierbei handelt es sich eigentlich um ein holonomes System, aber aus didaktischen Gründen lösen wir es jetzt so, als ob die differentiellen Zwangsbedingungen nicht alle aufintegriert werden können. Es gibt 5 holonome Zwangsbedingungen. Wir verwenden aber nur die ersten vier in diesem Sinne:

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 \Rightarrow S = 2 \quad q_1 = x_1, q_2 = x_2 \quad (1.120)$$

Die 5. holonome Zwangsbedingung lautet:

$$x_1 + x_2 - l = 0 \quad (1.121)$$

Wir verwenden sie in der differentiellen Form:

$$\begin{aligned} \Rightarrow dq_1 + dq_2 &= 0 \\ \Rightarrow a_{11} &= a_{12} = 1, \quad b_1 = 0 \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2) + g(m_1q_1 + m_2q_2)$$

Lagrange-Gleichungen der 1. Art:

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 - m_1g &= \lambda \\ m_2\ddot{q}_2 - m_2g &= \lambda \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} Q_1=Q_2=\lambda \\ \lambda=\text{generalisierte Kraft}=\text{Zwangskraft}=Z \end{array} \quad (1.122)$$

Die dritte Gleichung kommt aus der differentiellen Zwangsbedingung:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$$

1 Lagrange-Mechanik

Damit haben wir 3 Gleichungen für 3 Unbekannte.

Lösung wie früher:

Subtraktion:

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_2 \underbrace{\ddot{q}_2}_{-\ddot{q}_1} - (m_1 - m_2)g = 0 \quad (1.123)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (1.124)$$

Addition:

$$m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \underbrace{\ddot{q}_2}_{-\ddot{q}_1} - (m_1 + m_2)g = 2\lambda \quad (1.125)$$

$$\Rightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.126)$$

Die Zwangskraft zeigt der Koordinatenrichtung entgegen, also nach oben.

2. Rollender Zylinder auf der schiefen Ebene

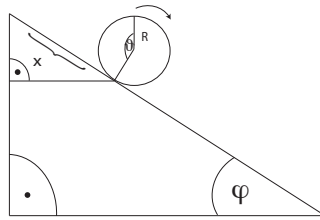


Abbildung 1.35: Ein Zylinder wird durch die Gewichtskraft auf einer schiefen Ebene nach unten gezogen. Aufgrund der Reibung gleitet er nicht, sondern rollt.

Die typische Anwendung nicht-holonomer Zwangsbedingungen sind Rollbewegungen. Diese gibt es aber nur für ausgedehnte Zylinder, so dass wir zum ersten Mal einem starren Körper begegnen (beim Zykloidenpendel war die Scheibe masselos und trat deshalb nur als geometrische Randbedingung auf). Wir betrachten einen Zylinder, der auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel ϕ nach unten rollt.

1 Lagrange-Mechanik

$S = 2$ generalisierte Koordinaten: $q_1 = x$, $q_2 = \vartheta$.

Differentielle Zwangsbedingungen: Rollen, nicht Gleiten $\Rightarrow R d\vartheta = dx$. Diese Zwangsbedingung ist eigentlich integrierbar (holonom), $x = x_0 + R\vartheta$, wir bleiben aber bei der differentiellen Form: $p = 1, -dq_1 + R dq_2 = 0 \Rightarrow a_{11} = -1, a_{12} = R, b_1 = 0$.

Für die Lagrange-Funktion benötigen wir jetzt die kinetische Energie eines Zylinders, der gleichzeitig translatiert und rotiert. Wir betrachten zunächst die raumfeste Rotation.

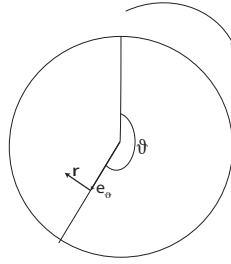


Abbildung 1.36: Die kinetische Energie des Zylinders folgt aus der Summe über alle Teilchen im Zylinder. Bei einer kontinuierlichen Massenverteilung benötigen wir also ein Integral.

Betrachte ein beliebiges Teilchen im Zylinder. Diese bewegt sich in der Richtung des Winkel-Einheitsvektors mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$, die für alle Teilchen gleich ist. Die Geschwindigkeit wird zusätzlich durch den Abstand r zur Drehachse bestimmt:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2, \quad \dot{\mathbf{r}} = r \dot{\vartheta} \hat{\mathbf{e}}_{\vartheta} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\vartheta} \underbrace{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}_{r \hat{\mathbf{e}}_{\vartheta}} \quad (1.127)$$

wobei wir einen Vektor definiert haben, der die Rotation beschreibt:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

Die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektor ist die Drehachse, und sein Betrag ist gerade die Winkelgeschwindigkeit.

1 Lagrange-Mechanik

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist die Summe über alle Teilchen. Für einen makroskopischen Körper gehen wir in den Kontinuumslimit über:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\
 &\rightarrow \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}}^2 \text{ Volumenintegral } (dxdydz = dV = d^3r = d\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int dxdydz \rho(\mathbf{r}) \dot{\vartheta}^2 \underbrace{r^2}_{(x^2+y^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\vartheta} \underbrace{\int dxdydz \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2)}_{=: J \text{ Trägheitsmoment}}
 \end{aligned}$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ aus dem Integral gezogen werden konnte, da sie für alle Teilchen im Körper gleich ist. Die Koordinaten x und y beziehen sich auf die Ebene senkrecht zur Drehachse. Damit folgt unser erstes Teilergebnis für den starren Körper:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2} \tag{1.128}$$

Das Trägheitsmoment J ist bei der Rotation also äquivalent zur Masse m bei der Translation.

Beispiele

1. Zylinder mit homogener Massenverteilung

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}) = \rho_0 &\Rightarrow J^{\text{Zylinder-K.}} = \rho_0 \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \\
 &= \rho_0 2\pi L \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \underbrace{(\rho_0 \pi R^2 L)}_M \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} M R^2
 \end{aligned}$$

Die Länge des Zylinders geht also nur in die Gesamtmasse M ein. Das Skalierungsverhalten mit M und R muss aus Dimensionsgründen so sein, aber der numerische Vorfaktor muss berechnet werden.

2. Hohlzylinder (z.B. rollendes Fass)

Die Wanddicke h wird als viel kleiner angenommen als der Radius R :

$$J = \rho_0 \int_{R-\frac{1}{2}h}^{R+\frac{1}{2}h} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz r^2$$

$$\stackrel{h \ll R}{=} \rho_0 2\pi L h R^3 = \underbrace{(\rho_0 2\pi R L h)}_M R^2 = M R^2$$

Das Trägheitsmoment ist um einen Faktor 2 größer als beim homogenen Zylinder, weil mehr Masse außen sitzt, d.h. die kinetische Energie ist beim gleichen Radius und bei der gleichen Gesamtmasse höher.

3. Homogene Kugel

Hier bieten sich Kugelkoordinaten an:

$$J = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\stackrel{x=\cos \vartheta}{=} \rho_0 2\pi \int_0^R dr r^4 \int_{-1}^1 dx (1-x^2)$$

$$= \rho_0 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \cdot \underbrace{\left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1}_{\frac{4}{3}} = \left(\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

Wieder ist es der Vorfaktor, der im Detail berechnet werden muss. Hier ist also die Masse effektiv näher an der Drehachse als beim homogenen Zylinder mit dem gleichen Radius.

Für die *raumfeste* Rotation haben wir also $T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2$ gefunden. Beim rollenden Zylinder ist die Rotation aber *körperfest*, d.h. wir müssen auch die Translation noch berücksichtigen. Ein Teilchen im starren Körper hat eine Geschwindigkeit, die sowohl Translation als auch Rotation beinhaltet:

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}_T}_{|\mathbf{v}_T|=\dot{x}} + \underbrace{\mathbf{v}_R}_{\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}}$$

mit Relativkoordinate $\bar{\mathbf{r}}$. Für die kinetische Energie folgt also:

$$T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2$$

$$= \frac{\rho_0}{2} \int d\mathbf{r} [\dot{x}^2 + 2\mathbf{v}_T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2]$$

$$= \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 + \rho_0 \mathbf{v}_T \cdot \underbrace{\int d\mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{=0}$$

1 Lagrange-Mechanik

Der gemischte Term verschwindet für den Zylinder aus Symmetriegründen: für jeden Punkt um Volumenintegral gibt es einen an der Drehachse gespiegelten, gegenüberliegenden Punkt, der den gleichen Beitrag mit einem negativen Vorzeichen liefert. Damit gibt es genau zwei Beiträge zur kinetischen Energie:

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{x}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{J}{2}\dot{\vartheta}^2}_{\text{Rotation}}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) g z = M g \underbrace{R_z}_{\text{Schwerpunkt}} \\ &= -M g x \sin \varphi + \text{const} \\ \Rightarrow L &= T - V = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{J}{2}\dot{\vartheta}^2 + M g x \sin \varphi \end{aligned}$$

Wir haben also eine Lagrange-Funktion gefunden mit $S = 2, x = q_1, \vartheta = q_2$.

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M \ddot{q}_1 - M g \sin \varphi = \lambda a_{11} = -\lambda \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = J \ddot{q}_2 = \lambda a_{12} = \lambda R \quad (2)$$

$$-\dot{q}_1 + R \dot{q}_2 = 0 \quad (3)$$

3 Gleichungen für 3 Unbekannte q_1, q_2, λ

$$(1) + \frac{(2)}{R} : \quad 0 = M \ddot{q}_1 - M g \sin \varphi + \frac{J}{R} \underbrace{\ddot{q}_2}_{\frac{\ddot{q}_1}{R} \text{ nach (2)}}$$

Homogener Zylinder: $J = \frac{1}{2} M R^2$

$$\Rightarrow \ddot{q}_1 = \frac{2}{3} g \sin \varphi$$

Wie erwartet haben wir eine konstante Beschleunigung wie beim freien Fall.
Zum Vergleich: gleitender Zylinder ohne Rotation:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 - M g x \sin \varphi \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \varphi$$

1 Lagrange-Mechanik

Die Rollbedingung verkleinert also die effektive Beschleunigung um ein Drittel. Wir vergleichen noch mit dem Hohlzylinder:

$$J = MR^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}g \sin \varphi} \quad (1.129)$$

Hier ist die Beschleunigung sogar um die Hälfte reduziert.

Die gleichen Ergebnisse hätten wir auch mit der Lagrange-Gleichung 2. Art für eine holonome Rechnung für die Koordinate q_1 erhalten. Der Vorteil der Lagrange-Gleichungen 1. Art ist jetzt, dass wir auch die Zwangskräfte erhalten:

$$\begin{aligned} -(1) + \frac{(2)}{R} : \quad \lambda &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{R}}_{\frac{J}{R}} \underbrace{\ddot{q}_2}_{\frac{\ddot{q}_1}{R}} - M \underbrace{\ddot{q}_1}_{\frac{2}{3}g \sin \varphi} + Mg \sin \varphi \right] \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}Mg \sin \varphi} \\ Q_1 &= \lambda a_{11} = -\frac{1}{3}Mg \sin \varphi \quad \text{Zwangskraft} \\ Q_2 &= \lambda a_{12} = \frac{1}{3}RMg \sin \varphi \quad \text{Zwangsdrehmoment} \end{aligned}$$

Die verallgemeinerten Zwangskraftkomponenten verschwinden also wenn $g = 0$ oder $\varphi = 0$, d.h. wenn keine treibende Kraft existiert. Bei einer Beschleunigung stellen sie sicher, dass die Geschwindigkeiten $\dot{x}$ und $\dot{\vartheta}$ so synchronisiert werden, dass die Rollbedingung gilt.

4. Rollendes Rad in der Ebene

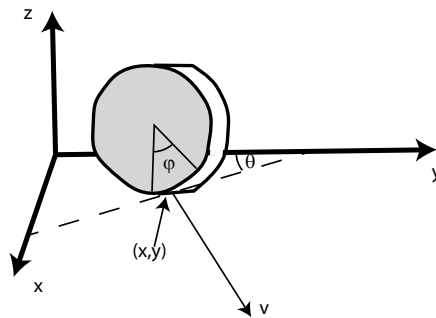


Abbildung 1.37: Das rollende Rad in der Ebene hat $S=4$ verallgemeinerte Koordinaten.

1 Lagrange-Mechanik

Dieses Beispiel wurde schon in der Einleitung erklärt: $S = 4, q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi, q_4 = \vartheta$. In diesem Fall sind die $p = 2$ differentiellen Zwangsbedingungen wirklich nicht-holonon da sich für die Differentiale

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \vartheta = R\dot{\varphi} \cos \vartheta \\ \dot{y} &= v \sin \vartheta = R\dot{\varphi} \sin \vartheta\end{aligned}$$

kein Integral finden lässt. Wir lesen ab:

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -R \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & -R \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.130)$$

Die Lagrange-Funktion hat nur kinetische Energie, da der Schwerpunkt des Rads seine Höhe nicht ändert:

$$L = T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{J_1}{2}\dot{\varphi}^2$$

Es gibt also vier Lagrange-Gleichungen der 1. Art:

$$\Rightarrow M\ddot{x} = \lambda_1 \quad (1)$$

$$M\ddot{y} = \lambda_2 \quad (2)$$

$$J_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 R \cos \vartheta - \lambda_2 R \sin \vartheta \quad (3)$$

$$J_2\ddot{\vartheta} = 0 \quad (4)$$

Insgesamt sind das 6 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Gleichung (4) kann direkt integriert werden:

$$\boxed{\vartheta = \omega t} \quad (1.131)$$

mit $\omega = \text{const.}$ In den Gleichungen (1) und (2) verwenden wir die differentiellen Zwangsbedingungen, nachdem wir sie einmal differenziert haben:

$$\lambda_1 = -MR\omega\dot{\varphi} \sin \omega t + MR\ddot{\varphi} \cos \omega t \quad (1.132)$$

$$\lambda_2 = MR\omega\dot{\varphi} \cos \omega t + MR\ddot{\varphi} \sin \omega t \quad (1.133)$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{aligned}J_1\ddot{\varphi} &= MR^2\omega\dot{\varphi} \sin \omega t \cos \omega t - MR^2\ddot{\varphi} \cos^2 \omega t \\ &\quad - MR^2\omega\dot{\varphi} \cos \omega t \sin \omega t - MR^2\ddot{\varphi} \sin^2 \omega t = -MR^2\ddot{\varphi} \\ \Rightarrow \underbrace{J_1}_{>0} \ddot{\varphi} &= \underbrace{-MR^2}_{<0} \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{const} = \Omega \Rightarrow \boxed{\varphi = \Omega t}\end{aligned}$$

1 Lagrange-Mechanik

Für x und y ergeben sich Lösungen vom Typ $t + \sin \omega t$:

$$x = v_{0,x}t + \frac{R\Omega}{\omega} \sin \omega t, \quad y = v_{0,y}t - \frac{R\Omega}{\omega} \cos \omega t$$

Damit sind die Zwangsbedingungen vollständig bestimmt:

$$Q_1 = -MR\omega\Omega \sin \omega t$$

$$Q_2 = MR\omega\Omega \cos \omega t$$

$$Q_3 = Q_4 = 0$$

Nur wenn das Rad um seine Hochachse rotiert, sind Zwangskräfte nötig, diese synchronisieren dann die Beschleunigung in x und y so, dass die Rollbedingung erfüllt ist.

Holonom versus nicht-holonom

Die Lagrange-Methode 1. Art funktioniert für differentielle Zwangsbedingungen, insbesondere für holonome Systeme mit $f_i(q_1, \dots, q_s, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq p$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^s \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial q_j}}_{a_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial t}}_{b_i} = 0$$

Für holonome Systeme gilt also

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \quad (1.134)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} \quad (1.135)$$

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Existenz eines Integrals. Bei den obigen Beispielen ist dies für ①,② erfüllt, aber nicht für ③: $\frac{\partial a_{13}}{\partial q_4} = R \sin \vartheta \neq \frac{\partial a_{14}}{\partial q_3} = 0$. Damit ist bewiesen, dass dieser Fall wirklich nicht-holonom ist.

1.9 Starrer Körper

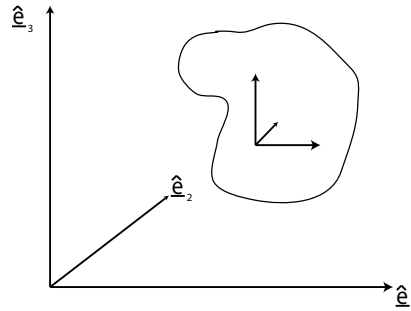


Abbildung 1.38: Im starren Körper sind die Entfernungen zwischen den einzelnen Massenpunkten konstant. Deshalb kann man auch einfach ein körperfestes Bezugssystem definieren.

Ein starrer Körper kann Translationen und Rotationen durchführen. Die Translation erfolgt wie bei einem Massenpunkt, da sie effektiv nur den Schwerpunkt betrifft. Bei der Rotation dagegen treten neue und verblüffende Effekte auf (Kreisel, Bumerang, Erdbewegung, etc). Die Kreiseltheorie ist eine der Höhepunkte der Mechanik, da sie sehr komplizierte Bewegungsmuster auf die wenigen einfachen Grundgesetze der Mechanik zurückführen kann. Außerdem wird sie in der Quantenmechanik wichtig, wenn es um die Eigenschaft des Spins geht. Hier verwenden wir die Lagrange-Mechanik, um den schweren Kreisel zu analysieren. Für die Kreiselbewegung mit externen Drehmomenten dagegen wäre die Newton-Mechanik besser geeignet.

Jeder starre Körper hat genau 6 Freiheitsgrade, 3 für die Translation (z.B. die Schwerpunktskoordinaten) und 3 für die Rotation (z.B. die Eulerwinkel, siehe später). Alternativ kann man sich die Zahl der Freiheitsgrade auch anhand eines Dreiecks herleiten, welches im starren Körper liegt. Dieses Dreieck ist durch seine 3×3 Koordinaten festgelegt und hat 3 Nebenbedingungen, also $9-3=6$ Freiheitsgrade. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Orientierungen des Dreiecks und des starren Körpers einander entsprechen.

Wir verwenden zwei Bezugssysteme:

- 1) raumfest: $\hat{\Sigma}, (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$
- 2) körperfest: $\Sigma, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

1 Lagrange-Mechanik

Ein Punkt i im starren Körper besitzt folgende Koordinaten:

$$\hat{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{l=1}^3 \hat{x}_{il}(t) \hat{\mathbf{e}}_l \text{ in } \hat{\Sigma} \quad (1.136)$$

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{l=1}^3 x_{il} \mathbf{e}_l(t) \text{ in } \Sigma \quad (1.137)$$

Schwerpunkt $\mathbf{R}$ bewegt sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) \Rightarrow \hat{\mathbf{r}}_i(t) &= \underbrace{\mathbf{r}_0(t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\mathbf{r}_i(t)}_{\text{Rotation}} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{r}}_i(t) &= \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \underbrace{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i(t))}_{\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}} \end{aligned}$$

Damit folgt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \hat{\mathbf{r}}_i^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_0^2}_{\text{Transl.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}_{\substack{\text{Spatprodukt} \\ \equiv M \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \text{Kopplung}}}$$

Der Kopplungsterm kann durch geeignete Wahl des Ursprungs von Σ zum Verschwinden gebracht werden:

- 1) **Unterstützter Kreisel:** Der Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um einen raumfesten Punkt, der als Ursprung gewählt wird $\Rightarrow \mathbf{r}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$
- 2) **Bewegung ohne raumfesten Punkt:** In diesem Fall wird der Schwerpunkt als Ursprung gewählt $\Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{0}$

Wir betrachten den Rotationsanteil zur kinetischen Energie:

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{[\omega^2 \mathbf{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2]}_{\substack{[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2) \\ - (\omega_1 x_{i1} + \omega_2 x_{i2} + \omega_3 x_{i3})^2]}} \quad (1.138)$$

da $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Durch Umgruppieren der verschiedenen Terme sieht man, dass man diesen komplizierten Ausdruck schreiben kann als

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} \mathbf{r}_i^2 - x_{il} x_{im})}_{=: J_{lm}} \omega_l \omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (1.139)$$

1 Lagrange-Mechanik

Das neu definierte Objekt heißt *Trägheitstensors* $\underline{\underline{J}}$. Ausgeschrieben:

$$\underline{\underline{J}} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} x_{i2}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i1}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i3}x_{i2} & x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

$\underline{\underline{J}} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i^2 \underline{\underline{I}} - \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i)$ (wobei $\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i = (r_i r_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$ das sogenannte *dyadische Produkt* ist) ist ein Tensor, dessen Eigenschaften unter Drehung garantieren, dass die kinetische Energie $T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 J_{lm} \omega_l \omega_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \underline{\underline{J}} \boldsymbol{\omega}$ invariant unter einer Drehung des Koordinatensystems ist. $\underline{\underline{J}}$ ist symmetrisch ($J_{lm} = J_{ml}$) und hat deshalb sechs unabhängige Koordinaten.

Beziehung zum Trägheitsmoment, das wir früher schon diskutiert hatten für den rollenden Zylinder: $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{l,m=1}^3 J_{lm} n_l n_m \right)}_{J_{\mathbf{n}}} \omega^2 \quad (1.141)$$

Aus dem Trägheitstensor kann also jedes Trägheitsmoment bzgl. einer Drehachse $\mathbf{n}$ berechnet werden.

Trägheitstensor im Kontinuumslimit:

$$J_{lm} = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{lm} - x_l x_m) \quad (1.142)$$

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ ist eine symmetrische reelle Matrix. Diese kann diagonalisiert werden durch Rotation des Bezugssystems (*Hauptachsentransformation*):

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

J_1, J_2, J_3 sind die *Hauptträgheitsmomente* bezüglich der dadurch definierten *Hauptträgheitsachsen*. Ab jetzt wählen wir für Σ das Hauptachsensystem. Die kinetische Energie hat dann die einfache Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 J_l \omega_l^2 \quad (1.144)$$

Da die kinetische Energie im Hauptachsensystem am einfachsten wird, muss man noch dessen Lage im Raum beschreiben. Um ein kartesisches Koordinatensystem $\hat{\Sigma}$ auf ein anderes Σ zu drehen, benötigt man im allgemeinen Fall genau drei

1 Lagrange-Mechanik

Rotationen, die durch die drei *Eulersche Winkel* (vergleiche Eulersche Winkel für Animationen in der Wikipedia) beschrieben werden:

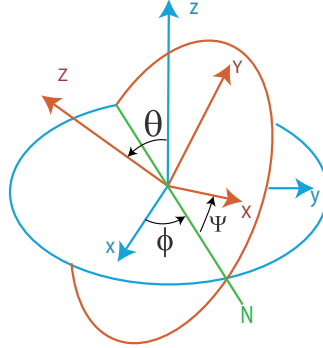


Abbildung 1.39: Definition der drei Eulerschen Winkel. Die blaue und die rote Scheiben schneiden sich in der grünen Knotenlinie, die bei allen drei Drehungen eine Rolle spielt.

1. Drehung um $\hat{\mathbf{e}}_3$ um Winkel Φ
2. Drehung um $\hat{\mathbf{e}}'_1$ um Winkel Θ
3. Drehung um $\hat{\mathbf{e}}''_3$ um Winkel Ψ

Diese drei Winkel werden auch für Flugzeuge, Helikopter, Drohnen und Computerspiele verwendet und sind dort als *roll*, *pitch* und *yaw* bekannt (vergleiche Roll-Nick-Gier-Winkel in der Wikipedia für Animationen).

Die 6 unabhängigen Komponenten des Trägheitstensors sind die 3 Hauptträgheitsmomente sowie die 3 Eulerschen Winkel, die die Rotation ins Hauptachsensystem beschreiben.

Wenn ein starrer Körper sich dreht, dann sind seine Eulerschen Winkel zeitabhängig. Dasselbe gilt für die Winkelgeschwindigkeit. Deshalb gibt es zwischen ihnen einen eindeutigen Zusammenhang (Herleitung mit Rotationsmatrizen, hier ausgelassen):

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (1.145)$$

Damit wird die kinetische Energie eine Funktion der Eulerschen Winkel:

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \underline{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 J_l \omega_l^2 = T_R(\Phi, \Theta, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi}) \quad (1.146)$$

Die Eulerschen Winkel (Φ, Θ, Ψ) können also als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

Der schwere Kreisel

Einen Kinderkreisel, der durch Reibung schon etwas Energie verloren hat und schief steht, nennt man schweren Kreisel, weil jetzt kinetische und potentielle Energie wichtig sind (andernfalls spricht man vom schnellen Kreisel). Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel ($J_1 = J_2$) im Schwerfeld und wenden den Lagrange-Formalismus auf die Eulerschen Winkel an. Als körperfestes Bezugssystem wird das Hauptachsensystem am Unterstützungspunkt gewählt.

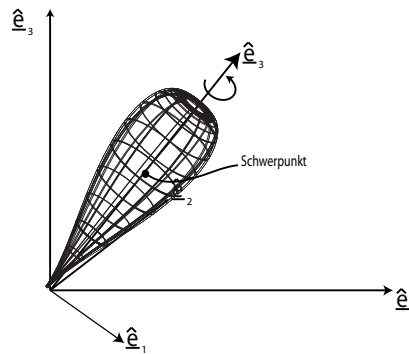


Abbildung 1.40: Der schwere Kreisel ist der typische symmetrische Kinderkreisel.

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \\ &= \boxed{\frac{J_1}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{J_3}{2} (\dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi})^2} \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\boxed{V = mgs \cos \Theta}$$

wobei s die Entfernung zwischen Unterstützungspunkt und Schwerpunkt ist.

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \boxed{\frac{J_1}{2} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{J_2}{2} (\dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi})^2 - Mgs \cos \Theta} = L(\Phi, \Theta, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi})$$

1 Lagrange-Mechanik

Das ergibt also 3 ODEs 2. Ordnung, die sogenannten "Euler-Gleichungen" der klassischen Mechanik. Allerdings hat die Lagrange-Funktion drei Symmetrien und somit drei Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow E = T + V = \text{const} \\
 \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0 &\Rightarrow p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = \text{const} = L_3 \text{ Drehimpulskomponente in Kreiselrichtung} \\
 &= J_3(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta) \\
 \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0 &\Rightarrow p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \text{const} = L_z \text{ Drehimpulskomponente in z-Richtung} \\
 &= J_1 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + J_3(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta) \cos \Theta = J_1 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + L_3 \cos \Theta
 \end{aligned}$$

Man erhält also drei ODEs 1. Ordnung. Wir eliminieren $\dot{\Phi}$ und $\dot{\Psi}$ mit L_z und L_3 in E:

$$E = \frac{J_1}{2} \dot{\Theta}^2 + \underbrace{\frac{(L_z - L_3 \cos \Theta)^2}{2J_1 \sin^2 \Theta} + \frac{L_3^2}{2J_3}}_{\text{effektives Potential } U_{\text{eff}}(\Theta)} + mgs \cos \Theta \quad (1.147)$$

Effektiv handelt es sich also hierbei um ein Ein-Teilchen-Problem mit den Parametern m, s, J_1, J_3 und den Anfangsbedingungen E, L_z, L_3 . Es gibt keine einfache analytische Lösung, weil U_{eff} dafür zu kompliziert ist. Jedoch besitzt $U_{\text{eff}}(\Theta)$ immer dieselbe Form:

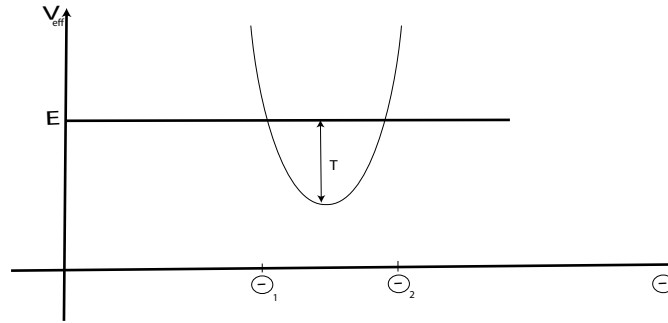


Abbildung 1.41: Typische Form des effektiven Potentials im Kippwinkel

Nur der Bereich unterhalb der horizontalen Linie ist erlaubt, weil sonst die kinetische Energie negativ wird. An den Schnittpunkten dreht die Winkelkoordinate also gerade um. Es kommt somit zu einer Oszillation in Θ , dadurch wippt der Kreisel auf und ab. Dies wird auch *Nutation* oder *Nickbewegung* genannt.

1 Lagrange-Mechanik

Aus den zwei anderen Erhaltungsgrößen lässt sich folgendes berechnen:

$$L_z - L_3 \cos \Theta = J_1 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \Theta}{J_1 \sin^2 \Theta}$$

Bei konstantem Θ dreht sich der Kreisel mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Phi}$ um die z -Achse. Dies wird auch *Präzession* genannt. $\dot{\Phi}$ hängt allerdings von Θ ab und kann deshalb sogar sein Vorzeichen wechseln. Es ergeben sich für oben genannte Parameter und Integrationskonstanten verschiedene mögliche Bewegungsmuster:

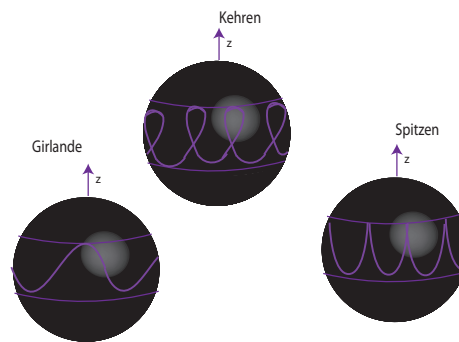


Abbildung 1.42: Verschiedene Bewegungsmuster für den schweren Kreisel

Unser Planet Erde ist kein unterstützter Kreisel, aber ein nicht-unterstützter symmetrischer Kugelmkreisler, der äußeren Kräften von Sonne und Mond ausgesetzt ist. Deshalb durchläuft er ähnliche Bewegungsformen wie der schwere Kreisel, die wir an der Bewegung des Fixsternhimmels ablesen können. Für Nutation und Präzession hat die Erde Perioden von 300 Tagen (bereits 1765 von Euler vorhergesagt) und 25.800 Jahren (Milankovic-Zyklen). Die Milankovic-Zyklen tragen zur Klimaveränderung bei und erklären die typischen Abstände der Eiszeiten. Die letzte Eiszeit endete etwa vor 11.700 Jahren. Damit begann das heutige Erdzeitalter, das Holozän, das mit der neolithischen Revolution begann (unabhängige Einführung von Ackerbau und Viehzucht an mehreren Orten auf der Erde). Um die Kreiselsbewegung der Erde im Detail zu verstehen, muss man allerdings viele andere Faktoren in Betracht ziehen, insbesondere Verformungen der Erde, Gezeitenkräfte und das periodische Abschmelzen der Polkappen. An der Winkelgeschwindigkeit der Erde kann man sogar Sommer und Winter ablesen, weil im Winter auf der Nordhalbkugel das Laub zur Erde fällt und sich deshalb das Trägheitsmoment verändert. Auch das Abschmelzen der Polkappen aufgrund des Klimawandels kann man so messen.

Die Präzession wird in der Quantenmechanik noch eine wichtige Rolle spielen, weil Elementarteilchen wie Protonen und Elektronen eine Eigenschaft namens Spin tra-

1 Lagrange-Mechanik

gen, die im klassischen Bild einer Kreiselbewegung entspricht. Z.B. liegt der Magnetresonanztomographie (MRT), die für die medizinische Bildgebung so wichtig ist, die Präzession des Spins der Wasserstoffkerne (Protonen) zugrunde (Nobelpreis für Physik 1944 an Isidor Isaac Rabi und 1952 an Felix Bloch und Edward Purcell, Nobelpreis für Medizin 2003 an Paul Lauterbur und Peter Mansfield).

2 Hamilton-Mechanik

Wie anfangs schon bemerkt, gibt es mehrere Formulierungen der Mechanik. Während die Newtonsche Mechanik beim Konzept der Kräfte ansetzt, die direkt mit Beschleunigungen in Beziehung gebracht werden, steht bei der Lagrangeschen Mechanik die Energie im Mittelpunkt. Das erlaubt viele neue Anwendungen, insbesondere für Zwangskräfte, aber eröffnet auch theoretische Perspektiven, weil die Rolle von Symmetrien und Erhaltungssätzen deutlich wird und man diese dann als Konstruktionsprinzip für neue Theorien verwenden kann. Diese Tendenz zur Abstraktion wird noch stärker, wenn man zur Hamiltonschen Mechanik fortschreitet. Hier verschiebt sich der Schwerpunkt von analytischen Konzepten (Differentialgleichungen) zu algebraischen Konzepten (Klammerformalismus). Tatsächlich sind wir der Hamiltonschen Mechanik in dieser Vorlesung schon zweimal begegnet: erstens bei der Einführung des Phasenraums bei der graphischen Analyse des harmonischen Oszillators, und zweitens bei der Definition der Hamilton-Funktion H als Legendre-Transformation der (negativen) Lagrange-Funktion L im Kontext des Noether-Theorems.

Die meisten Standardanwendungen der Mechanik werden in der Newtonschen oder Lagrangeschen Mechanik behandelt. Die Hamiltonsche Mechanik kommt bei Anwendungen nur für wenige fortgeschrittene Anwendungen zum Einsatz, z.B. für Störungstheorie in der Himmelsmechanik. Da die Hamiltonsche Mechanik aber die formale Grundstruktur der Mechanik herausarbeitet, hat sie sich als geeigneter Ausgangspunkt für die Theorienbildung in anderen Bereichen der Physik erwiesen:

- [A] Quantenmechanik: die Bewegungsgleichung der Wellenmechanik, die Schrödinger-Gleichung, wird aus der Hamilton-Funktion konstruiert. Die Bewegungsgleichung der Matrizenmechanik von Heisenberg wird mit dem Klammerformalismus formuliert, der in der Hamilton-Mechanik eingeführt wird, die Poisson-Klammer wird dann in der Quantenmechanik durch den Kommutator ersetzt.
- [B] Statistische Mechanik: es wird über mikroskopische Zustände mit einem Gewicht gemittelt, das sich aus den dynamischen Eigenschaften Hamiltonscher Systeme ergibt.
- [C] Dynamische Systeme: Studium der Bewegungsformen im sogenannten *Pha-*

2 Hamilton-Mechanik

senraum, einem zentralen Begriff der Hamiltonschen Mechanik. Die Erweiterung auf Nicht-Hamiltonsche Systeme wie Strömungsmechanik, Populationsdynamik oder chemische Reaktionen führt auf interessante neue Erkenntnisse, wie z.B. auf die Chaos-Theorie oder die Turing-Instabilität.

Eine Kenntnis der Grundkonzepte der Hamiltonschen Mechanik ist also für das Verständnis der nicht-klassischen Physik (Quantenmechanik, Statistische Mechanik) sehr wichtig. Aber auch die dynamischen Systeme sind sehr wichtig, z.B. im Bereich des maschinellen Lernens. Wir beschreiben hier die Grundzüge der Hamiltonschen Mechanik. Forminvarianz der kanonischen Gleichungen, kanonische Transformationen und die Hamilton-Jakobi-Theorie (die auf PDEs und die Formulierung der Quantenmechanik nach Schrödinger führt) werden aus Zeitgründen nicht behandelt.

2.1 Hamilton in der bisherigen Vorlesung

Bereits in früheren Abschnitten und der PTP1 haben wir im Zusammenhang mit der graphischen Analyse im *Phasenraum* eine erste Intuition für dessen Struktur gewonnen. Diese Betrachtungen führten uns zu einer Perspektive, in der Zustände eines mechanischen Systems durch ihren Ort im erweiterten Raum der kanonischen Variablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ beschrieben werden. Eine zeitliche Entwicklung war dann einfach eine Trajektorie durch diesen Phasenraum, eine explizite Berechnung der Geschwindigkeit ist dann nicht mehr nötig. In dieser Darstellung tritt die Symmetrie zwischen Ort und Impuls hervor, die dann auch zur Quantenmechanik führt. Die nun folgende Formulierung der Hamiltonschen Mechanik knüpft hier an und hebt die abstrakte Struktur des mechanischen Formalismus hervor. Während die Lagrangesche Mechanik wie die Newtonsche Mechanik noch mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung arbeitet, verwendet die Hamiltonsche Theorie Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Dynamik wird damit strukturell symmetrischer beschrieben.

Da wir den harmonischen Oszillator schon gut kennen, betrachten wir ihn nochmals aus dieser Perspektive.

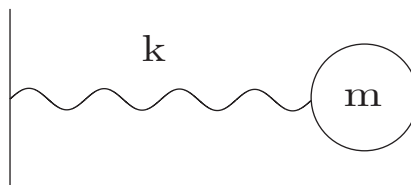


Abbildung 2.1: Harmonischer Oszillator

2 Hamilton-Mechanik

Mit Lagrange gilt:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0$$

also genau wieder die Newtonsche Gleichung.

Um eine symmetrischere Formulierung zu erhalten, können wir die Funktion umskalieren. Dazu setzen wir $q = (km)^{\frac{1}{4}}x$ (und außerdem $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ wie gewohnt):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\omega_0}\dot{q}^2 - \frac{\omega_0}{2}q^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\omega_0}\ddot{q} + \omega_0 q &= 0 \quad \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \end{aligned}$$

das heißt wir bekommen wieder die bekannten Bewegungsgleichungen. Da L nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt Energieerhaltung

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{Noether-}\Rightarrow\text{Theorem}} E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

In der Newtonschen Mechanik haben wir das explizit gezeigt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \quad | \cdot \dot{x} \\ \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} &= -kx\dot{x} \quad | \int dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 &= -\frac{1}{2}kx^2 + E \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{const.} \end{aligned}$$

Generell bekommen wir durch Umkehrung des Vorzeichens der Lagrange-Funktion $L = T - V$ die Hamilton-Funktion $L = T + V$. Wenn wir jetzt noch den verallgemeinerten Impuls $p = \delta L / \delta \dot{q} = \dot{q} / \omega_0$ einführen, dann wird die Hamilton-Funktion komplett symmetrisch:

$$H = \frac{1}{2}\omega_0(p^2 + q^2) .$$

In der Hamilton-Mechanik wird diese Symmetrisierung zum Prinzip erhoben. Die symmetrische Darstellung hilft auch bei der graphischen Analyse des harmonischen Oszillators. Die wurde über die Verdopplung der Variablen erreicht, nämlich durch Einführung von $v = \dot{x}$ als unabhängige Variable:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

2 Hamilton-Mechanik

Auch hier gehen wir jetzt einen Schritt weiter und ersetzen die Koordinaten durch q und $p = v/\omega_0$, dann bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Die so erhaltene Matrix sieht schon deutlich symmetrischer aus als die alte aus der Newton-Mechanik. Während man früher noch Ellipsen hatte aus der Energieerhaltung, werden es jetzt Kreise, weil

$$E = H = \frac{1}{2}\omega_0(p^2 + q^2) = \frac{p^2}{\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}^2} + \frac{q^2}{\sqrt{\frac{2}{\omega_0}}^2} = \text{const.}$$

das heißt wir haben eine Ellipse mit den identischen Halbachsen $a = b = \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}$, also einen Kreis.

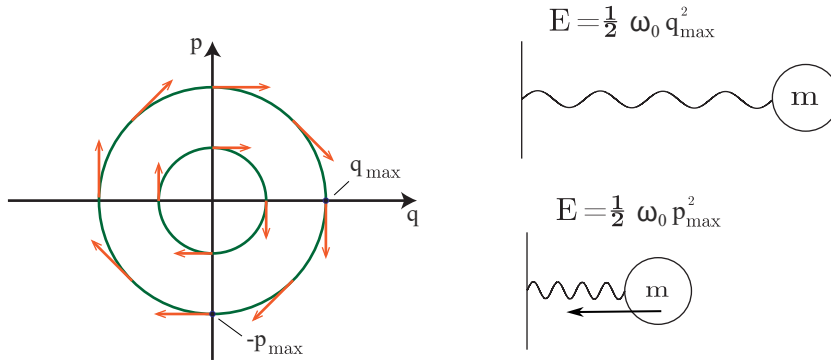


Abbildung 2.2: Phasenportrait des harmonischen Oszillators

2.2 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

Das gerade am harmonischen Oszillator geschilderte Prozedere führen wir jetzt allgemein durch. Die Hamilton-Funktion haben wir schon als Legendre-Transformation der (negativen) Lagrange-Funktion kennengelernt im Kontext des Noether-Theorems. Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ werden durch die verallgemeinerten Impulse p_j ersetzt:

$$p_j = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{q}_k = \dot{q}_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (2.1)$$

2 Hamilton-Mechanik

Die *Hamilton-Funktion* ist dann wie folgt definiert:

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) \quad (2.2)$$

Die genaue Verkettung der Abhängigkeiten ist wichtig, wenn man nach den fundamentalen Variablen ableitet.

Als nächstes suchen wir Bewegungsgleichungen, die nicht über die Lagrange-, sondern über die Hamilton-Funktion funktionieren. Dafür betrachten wir die partielle Ableitungen von $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^S \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)$ nach den verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q}$ und den verallgemeinerten Impulsen $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} \\ &\stackrel{\text{Lagrange-Gl.}}{=} - \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} = -\dot{p}_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} p_j + \dot{q}_k - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (2.4)$$

Da die Variablen q_j und p_j jeweils an drei Stellen in H vorkommen, muss man erst einmal drei partielle Ableitungen nach den drei Argumenten der jeweiligen Funktionen bilden, unabhängig davon, ob man hinterher partiell oder total ableiten will. Dann erst erfolgt die eigentlich gewünschte partielle Ableitung, für die wie für jede Ableitung die Kettenregel gilt. Nach Konstruktion heben sich jeweils zwei der drei Terme auf. Damit folgen die *Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen*:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_k}, \dot{p}_k = - \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_k} \quad (2.5)$$

Das sind 2S ODEs 1. Ordnung. Zum Vergleich: die äquivalenten Lagrange-Gleichungen sind S ODEs 2. Ordnung, beides Mal werden 2S Anfangsbedingungen benötigt. Offensichtlich wird die Lösung dieser Gleichungen numerisch stabiler, weil man nur einmal integrieren muss. Allerdings hat sich die Zahl der Gleichungen verdoppelt. Die kanonischen Gleichungen zeigen ein hohes Maß an Symmetrie zwischen $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ (nur das Minuszeichen stört die Harmonie etwas, seine Position muss man sich einfach merken). Sie beschreiben die Bewegung im 2S-dimensionalen $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ -Raum,

2 Hamilton-Mechanik

dem sogenannten *Phasenraum*. Die Hamiltonsche Mechanik ist deshalb analog zur Strömungsmechanik: die Hamilton-Funktion definiert ein Flussfeld, und der Zustand des Systems folgt deterministisch der Trajektorie im Phasenraum. Der Start bei einer bestimmten Anfangsbedingung entspricht dem Aussetzen eines Teilchens in einem Flussfeld, von da ab muss man einfach seiner Strömung folgen. In der Hamiltonschen Mechanik ist die Topologie des Flussfeldes wichtig, was nochmals zeigt, dass sie sich auf die fundamentalen Eigenschaften der Mechanik fokussiert. Da die Hamilton-Funktion auch von der Zeit anhängen kann, gibt es noch eine dritte Gleichung:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} p_j - \sum_{j=1}^S \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.6)$$

Diese Gleichung kennen wir schon vom Noether-Theorem: wenn die Lagrange-Funktion zeitunabhängig ist, dann ist die Hamilton-Funktion gleich der Energie und diese ist erhalten.

2.3 Hamiltonsches Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten (bzw. stationären) Wirkung, $\delta S = 0$, überträgt sich von der Lagrange- direkt in die Hamilton-Mechanik.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int dt L = \delta \int dt \left[\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \right] \\ &= \int dt \sum_{j=1}^S \left[\dot{q}_j \delta p_j + \underbrace{p_j \delta \dot{q}_j}_{(*)} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j \right] \\ (*) \text{ Partielle Integration: } &\int dt p_j \delta \dot{q}_j = \underbrace{p_j \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int dt \dot{p}_j \delta q_j \\ \Rightarrow \delta S &= \int dt \sum_{j=1}^S \left[\underbrace{\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j}_{=0} - \underbrace{\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j}_{=0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der kanonischen Gleichungen bekommen wir also wieder das Prinzip der stationären Wirkung.

2.4 Beispiele

Beispiele

1. Teilchen im Potential

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V \Rightarrow p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z} \Rightarrow \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \boxed{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V}$$

Kanonische Gleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Entsprechende für die anderen Koordinaten. Das Ergebnis entspricht den Newtonschen Gleichungen.

2. Mathematisches Pendel

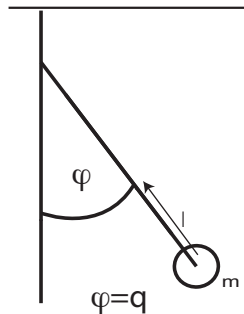


Abbildung 2.3: Mathematisches Pendel: die verallgemeinerte Koordinate ist ein Winkel, deshalb hat der Impulsterm nicht die übliche Form.

2 Hamilton-Mechanik

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q \\
 \Rightarrow p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} \Rightarrow H = \dot{q}p - L = \frac{p^2}{ml^2} - \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q \\
 \Rightarrow &\boxed{H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q}
 \end{aligned}$$

Kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl \sin q \\
 \Rightarrow \ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{ml^2} = -\frac{g}{l} \sin q
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht den Newtonschen Gleichungen. Linearisierung ergibt wieder den harmonischen Oszillator.

3. Teilchen in Polarkoordinaten $\rightarrow$ Bewegung im Zentralfeld

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{mr^2} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r)$$

Kanonische Gleichungen:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \text{zyklisch} \Rightarrow \text{L-Erhaltung}$$

4. Teilchen in Kugelkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

$$\Rightarrow p_r = m\dot{r}, p_\vartheta = mr^2 \dot{\vartheta}, p_\varphi = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}) + V(r, \vartheta, \varphi)}$$

5. Teilchen im elektromagnetischen Feld

verallgemeinertes Potential für Lorentz-Kraft: $U = q(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\varphi$$

$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}$ verallgemeinerter Impuls

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} + q\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi}$$

2.5 Volumen des Phasenraums

Wir diskutieren den Phasenraum am Beispiel des 1D harmonischen Oszillators:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\underbrace{m\omega_0^2}_{=k}q^2, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2q^2}$$

Der Phasenraum (q, p) ist zwei-dimensional, also eine *Phasenebene*.
Kanonische Gleichungen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{2.7}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2q \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2q \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2q = 0 \quad \checkmark \tag{2.9}$$

Die kanonischen Gleichungen entsprechen also genau der Newtonschen Gleichung für den harmonischen Oszillator. Sie sind aber besser dafür geeignet, die Bewegung auf geometrische Art und Weise zu untersuchen, da sie den Fluss im Phasenraum beschreiben. Ein Plot in der Phasenebene ergibt eine geschlossene Kurve, daran sieht man, dass es sich um eine Oszillation handelt.

Energieerhaltung (Noether-Theorem):

$$H = H(q, p) = E = \text{const}$$

2 Hamilton-Mechanik

Die Bewegung ist also eingeschränkt auf eine Kurve im Phasenraum.

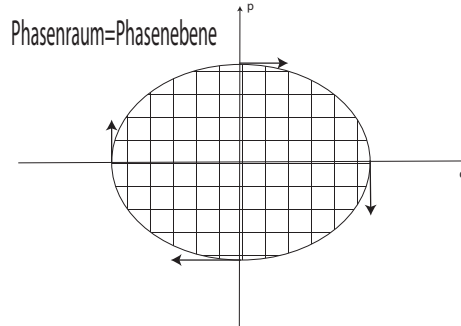


Abbildung 2.4: Beim harmonischen Oszillator bewegt sich das System im Phasenraum auf einer Ellipse.

Nach Division der Hamilton-Funktion durch E bekommt man eine Ellipsengleichung:

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{1}{m\omega_0^2}E} \quad (2.10)$$

mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}, b = \sqrt{2mE}$$

Der harmonische Oszillator bewegt sich also im Phasenraum auf einer Ellipse.

In der Quantenmechanik und Statistischen Mechanik spielt das Phasenraumvolumen V_{PR} eine zentrale Rolle. Wie viele Zustände gibt es mit Maximalenergie E ? Beim harmonischen Oszillator entspricht das genau dem Flächeninhalt der Ellipse:

$$V_{PR} = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega_0} \quad (2.11)$$

In der Quantenmechanik gibt es diskrete Zustände. Wir nehmen an, dass der Phasenraum in endliche Pakete mit Volumina $\Delta q \Delta p = h$ aufgeteilt wird, wobei h die Dimension einer Wirkung hat, $[h] = m \cdot kg \cdot \frac{m}{s} = m \cdot N \cdot s = J \cdot s$. Wie viele Zustände gibt es dann mit Maximalenergie E ?

$$N = \frac{V_{PR}}{h} = \frac{2\pi E}{h\omega_0} = \boxed{\frac{E}{\hbar\omega_0} = N} \quad (2.12)$$

wobei $h = 6,6 \cdot 10^{-34} Js$ eine Naturkonstante ist (*Plancksches Wirkungsquantum*) und $\frac{h}{2\pi} = \hbar = h$ quer eine geschickte Abkürzung. Das Volumen des Phasenraums wird also in Einheiten von h gemessen.

2.6 Satz von Liouville

Wie oben schon erklärt, bewegt sich ein Zustand im $2S$ -dimensionalen Phasenraum wie ein Teilchen in einer Flüssigkeit, wir haben es also mit einer Phasenraumflüssigkeit zu tun. Ihre Geschwindigkeit beträgt an jedem Ort ($1 \leq i \leq S$):

$$v_{q_i} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.13)$$

$$v_{p_i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.14)$$

Die Dichteänderung einer Flüssigkeit hängt mit der Divergenz ihres Strömungsfeldes zusammen. Um Aussagen über die Dichteänderung des Hamiltonschen Flusses treffen zu können, berechnen wir also die Divergenz dieser $2S$ -dimensionalen Geschwindigkeit:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial v_{p_i}}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.15)$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, da die Reihenfolge in den doppelten partiellen Ableitungen vertauscht werden dürfen. Das bedeutet, dass die Phasenraumflüssigkeit Divergenz-frei und damit inkompressibel ist. Dieses Theorem steht am Beginn der Statistischen Physik, wird nach Liouville benannt, aber geht eigentlich auf Gibbs zurück.

Wenn wir uns eine Region im Phasenraum denken, so kann sich ihre Form im Laufe der Zeit stark ändern, aber ihr Volumen wird konstant bleiben (und damit auch die Zahl der zugehörigen Zustände). Für den harmonischen Oszillator ist das trivial, die Ellipse bleibt immer die gleiche, aber dieses Theorem gilt für alle Phasenraumbereiche unter Hamiltonschem Fluss. Hier ist ein ganz anderes Beispiel:

$$H = pq \Rightarrow \dot{q} = q, \dot{p} = -p. \quad (2.16)$$

p zerfällt also exponentiell mit der Zeit, aber q wächst exponentiell mit der Zeit, d.h. ein Phasenraumvolumen wird entlang der p -Achse komprimiert, aber entlang der q -Achse ausgezogen. Diese Verformung ist extrem, aber das Volumen bleibt konstant.

2.7 Poisson-Klammer

In der Hamilton-Mechanik ist alles eine Funktion von $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \Rightarrow$ physikalische Observable $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ (z.B. Energie, Schwerpunkt, Impuls, Drehimpuls, etc.)

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \underbrace{\dot{q}_j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.17)$$

Wir definieren für zwei Funktionen F, G die *Poisson-Klammer* von F mit G :

$$\{F, G\} := \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \quad (2.19)$$

Damit folgt: wenn eine Observable nicht explizit von der Zeit abhängt ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$), dann ist F eine Erhaltungsgröße, wenn seine Poisson-Klammer mit H verschwindet. Von der Definition folgt direkt: $\{F, G\} = -\{G, F\}$, $\{F, F\} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_0 + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.20)$$

H ist also eine Erhaltungsgröße, wenn $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dieses Ergebnis hatten wir auch schon aus dem Noether-Theorem erhalten.

Die Zeitentwicklung von q_j und p_j entspricht den kanonischen Gleichungen (partielle Ableitungen nach der Zeit gibt es nicht, da dies fundamentale Variablen sind):

$$\boxed{\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \dot{p}_j = \{p_j, H\}} \quad (2.21)$$

$$\{q_l, H\} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial q_l}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_l}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^S (\delta_{lj} \frac{\partial H}{\partial p_j} - 0) = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \checkmark \quad (2.22)$$

Mit Hilfe der Poisson-Klammer werden die kanonischen Gleichungen also vollständig symmetrisch in verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen.

Die Poisson-Klammer kann als Differentialoperator betrachtet werden:

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) G =: D_F G \quad (2.23)$$

Daraus sieht man sofort, dass die Poisson-Klammer linear in G ist, einer Produktregel in G genügt und für $G = \text{const}$ verschwindet.

2 Hamilton-Mechanik

Im Hamilton-Formalismus sind q_j , p_j und t die unabhängigen Variablen. Daraus ergeben sich die *fundamentalen Poisson-Klammern*:

$$\{q_k, q_l\} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial q_l}{\partial p_j}}_0 - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_0 \underbrace{\frac{\partial q_l}{\partial q_j}}_{\delta_{lj}} \right) = 0 \quad (2.24)$$

$$\{p_k, p_l\} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q_j}}_0 \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_0 \right) = 0 \quad (2.25)$$

$$\{q_k, p_l\} = \sum_{j=1}^S \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_0 \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_0 \right) = \delta_{kl} \quad (2.26)$$

$$\{p_k, q_l\} = -\{q_l, p_k\} = -\delta_{kl} \quad (2.27)$$

In der Quantenmechanik taucht eine Klammer $[A, B] = AB - BA$ auf (*Kommutator*), die die gleichen formalen Eigenschaften hat wie die Poisson-Klammer $\Rightarrow$ Hamilton-Mechanik und Quantenmechanik haben die gleiche formale Struktur (allerdings sind A und B in der Quantenmechanik dann Operatoren). Dies motiviert den Aufbau einer algebraischen Struktur mit einer abstrakten Klammeroperation (alle 5 Axiome können für die Poisson-Klammer direkt nachgeprüft werden):

- 1) Antisymmetrie: $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- 2) Linearität: $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
- 3) Alternierend: $\{F, F\} = 0$
- 4) Produktregel: $\{F, GK\} = G\{F, K\} + \{F, G\}K$
- 5) Jacobi-Identität: $\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0$ (zyklische Vertauschung)
- 6) Nullelement: $\{F, c\} = 0$

Wenn eine Operation $\{\cdot, \cdot\} : V \times V \rightarrow V$ die Eigenschaften 2) - 4) erfüllt nennt man sie *Lie-Klammer* über dem Vektorraum V . Gilt zusätzlich noch Eigenschaft 5), so spricht man von einer *Poisson-Algebra*. Diese kann nicht nur für Funktionen, sondern für allgemeine Ringe definiert werden, weshalb die Reihenfolge der Klammer und des Elements außerhalb der Klammer in 5) wichtig ist (eine Poisson-Algebra muss im Allgemeinen nicht kommutativ sein). Dieses Maß an Abstraktion

2 Hamilton-Mechanik

ist auch in der Physik nützlich, z.B. bildet der Kommutator der Quantenmechanik mit den linearen Operatoren über dem Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen eine Poisson-Algebra.

Mit dem Klammer-Formalismus können viele Probleme algebraisch gelöst werden, ohne auf die Details Bezug nehmen zu müssen.

Beispiel Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \\ \Rightarrow \dot{p} &= \{p, H\} = \frac{1}{2m}\{p, p^2\} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\{p, q^2\} \\ &= \frac{1}{2m}[p \underbrace{\{p, p\}}_{=0} + \underbrace{\{p, p\}}_{=0} p] + \frac{1}{2}m\omega_0^2[q \underbrace{\{p, q\}}_{=-1} + \underbrace{\{p, q\}}_{=-1} q] \\ \Rightarrow \dot{p} &= -m\omega_0^2 q \\ \text{Analog: } \dot{q} &= \{q, H\} = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Damit haben wir die kanonischen Gleichungen für den harmonischen Oszillator rein algebraisch und ohne Bezug auf die klassische Definition der Poisson-Klammer hergeleitet. Die gleichen Bewegungsgleichungen gelten deshalb in der Quantenmechanik, nur dass q und p hier anders interpretiert werden.
