

Vorlesungsskript

Theoretische Physik I

Klassische Mechanik

Dozent Prof. Dr. Ulrich Schwarz

WS 2024/25

Stand 15. April 2025



Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Skript wurde für die Anfängervorlesung *Theoretische Physik I - Klassische Mechanik* im Wintersemester 2010/11 erstellt. Der Heidelberger Studienplan für Bachelor-Studenten der Physik sieht vor, dass die Theoretische Physik schon im ersten Semester beginnt. Obwohl die meisten Studenten vor Semesterbeginn in einem Vorkurs ihre schulischen Mathematikkenntnisse auffrischen, können die für die Vorlesung nötigen mathematischen Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt werden und wurden deshalb als mathematische Einschübe in die Vorlesung aufgenommen. Es gibt viele sehr gute Bücher zum Thema Klassische Mechanik, aber nur wenige, die für diese Besonderheit des Studienplans geeignet sind. Der erste Band der Springer-Serie *Grundkurs Theoretische Physik* von Wolfgang Nolting zum Thema *Klassische Mechanik* kommt diesem Schema sehr nahe und wurde deshalb ausdrücklich empfohlen. Die hier wiedergegebene Vorlesung lehnt sich in Stoffauswahl und Notation eng an dieses Buch an, setzt aber andere Schwerpunkte und ergänzt den Stoff in einigen Bereichen. Um den Studierenden bei der Nachbearbeitung der Vorlesung und der Vorbereitung der Klausur zu helfen, wurde deshalb dieses Skript erstellt.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zur Entstehung des Skripts beigetragen haben. Ein herzliches Dankeschön geht an Mirko Link, der als studentische Hilfskraft manches Wochenende eingesetzt hat, um die Grundversion in Latex und die vielen Abbildungen zu erstellen. Vielen Dank auch an die Studienggebührenkommission für die finanzielle Unterstützung. Und schließlich vielen Dank an alle Studierende, die über die ELearning-Plattform zur Vorlesung auf Fehler aufmerksam gemacht haben.

Wer mehr Literatur zur Klassischen Mechanik sucht, kann neben dem erwähnten Buch von Wolfgang Nolting auch zu den Büchern von Torsten Fließbach, Walter Greiner, Florian Scheck oder Friedhelm Kuypers greifen. Die Klassiker (Goldstein, Landau-Lifshitz, Feynman) sind für den Anfang eines Bachelor-Studiums wohl eher nicht zu empfehlen. Erwähnenswert finde ich aber noch die *Einführung in die Theoretische Physik* von Josef Honerkamp und Hartmann Römer, die auch sehr starken Wert auf die Einführung der mathematischen Methoden legt. Wer speziell die mathematischen Grundlagen für das erste Semester aufarbeiten möchte, hat mittlerweile eine schöne Auswahl, z.B. *Mathematik für Physiker* von Klaus Weltner, *Mathematische Methoden in der Physik* von Christian Lang und Norbert Pucker oder *Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr* von Markus Otto.

Heidelberg, im April 2011

Ulrich Schwarz

Vorwort zur zweiten Auflage

Nach mehr als 10 Jahren lese ich jetzt zum zweiten Mal die *Klassische Mechanik* in Heidelberg, und wie zu erwarten hat sich im Stoff nicht wirklich etwas geändert. Was anders und tatsächlich viel besser ist als früher, ist die Zugänglichkeit zu Hilfsmitteln. Viele Lehrbücher lassen sich jetzt als PDF herunterladen, insbesondere das von mir empfohlene Buch von Nolting. Mit den jetzt sehr verbreiteten Tablets lassen sich diese leicht lesen und annotieren. Mathematica und Matlab sind über Campuslizenzen für Studierende umsonst zugänglich. Und mit ChatGPT, Perplexity und anderen KI-Programmen kann man heutzutage leichter Fragen stellen und Ressourcen finden. Neu ist auch das Buch *Mathematics for Physicists* von Altland und von Delft. Einige der oben erwähnten Bücher gibt es jetzt in neueren Auflagen.

Die zweite Auflage des Skripts beginnt wie die alte mit der Kinematik. Hier wird gezeigt, welche mathematische Begriffe benötigt werden, um Bewegung in Raum und Zeit zu beschreiben, ohne schon den Begriff der Kräfte bemühen zu müssen. Die Kräfte sind Gegenstand der Dynamik, die mit den Newtonschen Gesetzen beginnt. Hier können wir dann die mathematischen Grundlagen verwenden, die in der Kinematik gelegt wurden. Im Gegensatz zur ersten Auflage geht es dann aber nicht nur den eindimensionalen Modellsystemen wie freier Fall und harmonischer Oszillator weiter, sondern wir kommen gleich zu den fundamentalen Begriffen von Energie, Impuls und Drehimpuls. Der Schwerpunkt wird also eher auf die Grundlagen als auf die Anwendungen gelegt. Dann wird gezeigt, wie sich die Lösung des Kepler-Problems aus diesen Begriffsbildungen ergibt. Erst dann kommen die eindimensionalen Modellsystemen und damit die explizite Lösung von Differentialgleichungen. Am Schluss wird noch auf Mehrkörperprobleme und insbesondere auf lineare Schwingungen eingegangen. Scheinkräfte und der starre Körper wurden aus Zeitgründen nicht behandelt.

Heidelberg, im Januar 2025

Ulrich Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik des Massenpunktes	7
1.1	Massenpunkte und Ortsvektoren	7
1.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung	9
1.3	Mathematischer Einschub 1: Vektoralgebra	10
1.4	Mathematischer Einschub 2: Vektoranalysis	22
1.5	Von Beschleunigung zu Bahnkurve	34
1.6	Geschwindigkeit und Beschleunigung im mitbewegten System . . .	38
1.7	Mathematischer Einschub 3: Koordinatensysteme	39
1.8	Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten	65
2	Dynamik des Massenpunktes	69
2.1	Die Newtonsche Gesetze	69
2.2	Grundschemata der Klassischen Mechanik	72
2.3	Energie- und Drehimpulserhaltung	76
	Energie in 1D	76
	Energie in 3D	80
	Drehimpuls in 3D	84
2.4	Die drei Kepler'schen Gesetze	85
	2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)	86
	1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz)	87
	3. Kepler'sches Gesetz	92
2.5	Annahme von Punktteilchen	92
3	Dynamik in einer Dimension	96
3.1	Fallgesetze	96
	Freier Fall	96
	Fall mit Stokes'scher Reibung	97
3.2	Mathematischer Einschub 5: Lineare ODEs	101
3.3	Mathematischer Einschub 6: Komplexe Zahlen	104
3.4	Der harmonische Oszillator	107
	Grundgleichung	107
	Gedämpfter harmonischer Oszillator	109
	Getriebener harmonischer Oszillator	113
	Phasenraum	117

Fadenpendel	119
4 Mehrteilchensysteme	121
4.1 Motivation	121
4.2 Notation	124
4.3 Erhaltungssätze	126
4.4 Zwei-Teilchen-Systeme	133
4.5 Kepler-Problem	134
4.6 Zwei-Teilchen-Streuung	135
4.7 Lineare Schwingungen	143

1 Kinematik des Massenpunktes

1.1 Massenpunkte und Ortsvektoren

Gegenstand der Mechanik ist die Beschreibung und Vorhersage der Bewegung von Masse-behafteten Körpern in Raum und Zeit aufgrund von Kräften (die zentralen Begriffe sind unterstrichen). Diese Definition ist zirkulär, weil man Bewegung letztendlich durch Kräfte definiert (eine gleichförmig gradlinige Bewegung resultiert, wenn keine Kräfte wirken) und umgekehrt (Kräfte kann man messen, weil sie die Bewegung ändern), aber das ist nicht schlimm. Wichtig ist, dass man alle Begriffe präzise und quantitativ definiert.

Wie immer in der Physik ist das Ziel, mit möglichst wenigen Gesetzen eine möglichst allgemein gültige Beschreibung zu erzielen.

⇒ 3 Newton'sche Gesetze (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1687)

Man unterscheidet zwei Untergebiete:

Kinematik: mathematische Beschreibung der Bewegung

Dynamik: Berechnung der Bewegung aus Kräften

Weiterhin beschränken wir die Kinematik auf *Massenpunkte*, deren Ausdehnung für die betrachtete Fragestellung keine Rolle spielt.

Beispiel

Bewegung der Erde um die Sonne. Der Abstand zwischen Sonne und Erde (die sogenannte Astronomische Einheit, etwa 150 Millionen km oder 8.3 Lichtminuten) ist so groß gegenüber den Radien von Erde (6.400 km) und Sonne (700.000 km), dass man deren Abmessungen vernachlässigen kann bei der Herleitung der Keplerschen Gesetze.

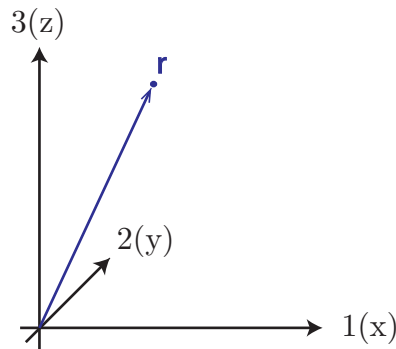


Abbildung 1.1: Ortsvektor eines Massenpunktes

Ein Massenpunkt wird vollständig durch seinen *Ortsvektor* $\mathbf{r}$ charakterisiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}_i = x_i \hat{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

wobei die letzte Formel der *Einstein'schen Summenkonvention* entspricht: über doppelt vorkommende Indizes wird summiert (wird im Skript *nicht* verwendet). Die drei Einträge x_1 , x_2 und x_3 in den Vektor sind die drei Komponenten und die drei kartesischen Einheitsvektoren sind

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies wird in der Klassischen Mechanik als fest angenommen, dh. wir haben einen absoluten Raum als Bezugssystem. Das kann sich ändern, wenn wir das Bezugssystem ändern, insbesondere wenn wir das begleitende Dreibein des Teilchens oder krummlinige Koordinaten verwenden. In der speziellen Relativitätstheorie ändert sich dies aus physikalischen Gründen.

Wenn sich ein Massenpunkt bewegt, dann entsteht eine *Trajektorie* oder *Bahnkurve* $\mathbf{r}(t)$.

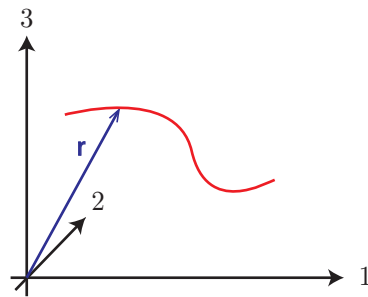


Abbildung 1.2: Trajektorie

Mathematisch:

Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i$$

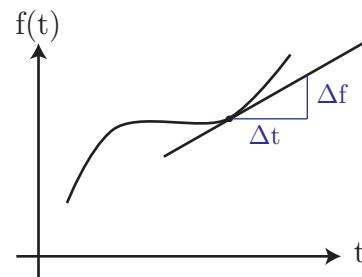
Die Zeitabhängigkeit betrifft hier also nur die Komponentenfunktionen $x_i(t)$, die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$ sind hier zeitunabhängig, wie oben schon erklärt. In der klassischen Mechanik ist die Zeit absolut und wird als unabhängiger Parameter betrachtet, der gleichförmig vor sich hin fließt. Mathematisch gesehen parametrisiert die Zeit die Bahnkurve.

1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Differentialquotient oder **Ableitung** einer Funktion $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Geometrisch entspricht dies der Steigung am Punkt t . Die entsprechende Gerade ist die lineare Näherung für die Kurve.



Das gleiche Konzept kann auch auf vektorwertige Funktionen angewendet werden:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Die Ableitung erfolgt also komponentenweise.

Die Ableitung des Ortsvektors ist der *Geschwindigkeitsvektor*:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Geometrisch handelt es sich um einen Tangentialvektor an die Bahnkurve. Die entsprechende Gerade ist die lineare Näherung.

Auch von dem Geschwindigkeitsvektor kann eine Ableitung gebildet werden:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) \quad \text{Beschleunigungsvektor}$$

In der Klassischen Mechanik spielen höhere Ableitungen (glücklicherweise) keine Rolle. Die typische Fragestellung besteht darin, aus einer gegebenen Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ zu berechnen.

→ Wie kommt man von $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ zu $\mathbf{r}(t)$?

⇒ Integration als Umkehrung der Differentiation.

Bevor wir dazu kommen, wollen wir aber erst einmal die mathematischen Grundlagen für das Rechnen mit Vektoren vertiefen. Dazu kommen jetzt zwei mathematische Einschübe:

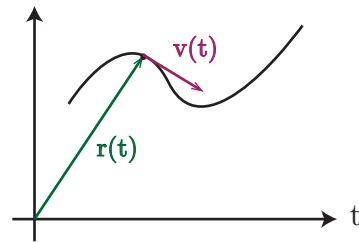
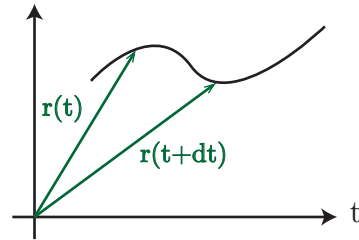
→ Vektoralgebra = algebraisches Rechnen mit Vektoren

→ Vektoranalysis = Infinitesimalrechnung mit Vektoren

1.3 Mathematischer Einschub 1: Vektoralgebra

Jeder Vektor (z.B. Ortsvektor) hat **Betrag** und **Richtung**. Physikalische Größen, die nur einen Betrag haben, heißen *Skalare* (z.B. Druck oder Temperatur).

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Pythagoras}]{\text{Länge nach}} |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



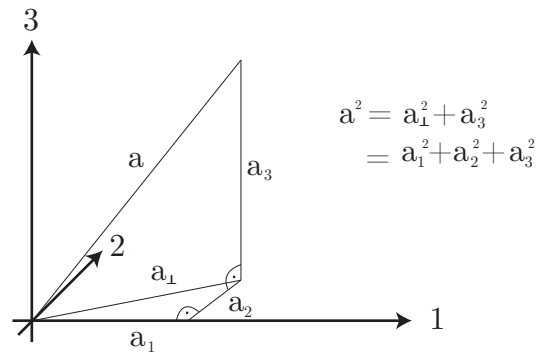


Abbildung 1.3: Länge eines Vektors nach Pythagoras

Statt mit (a_1, a_2, a_3) kann der Vektor auch mit (a, ϑ, φ) beschrieben werden, also mit dem Betrag und zwei Winkeln für die Richtung. Dabei wird ϑ als *Polarwinkel* und φ als *Azimutalwinkel* bezeichnet.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \sin \vartheta \cos \varphi \\ a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

Einheitsvektor aus $\mathbf{a}$ machen:

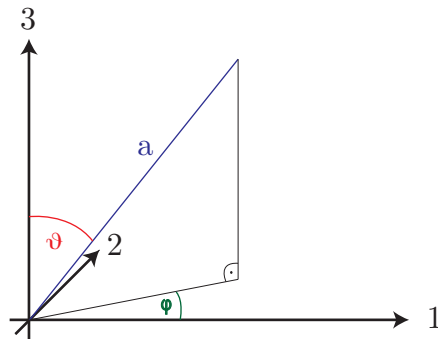


Abbildung 1.4: Kugelkoordinaten

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Check: $\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \hat{a}_3^2 = \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$

Elementare Rechenregeln

Vektoren können addiert, subtrahiert und mit Skalaren multipliziert werden.

Addition

Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h. es gilt: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Geometrisch betrachtet ergibt sich diese Eigenschaft aus der *Parallelogrammregel*.

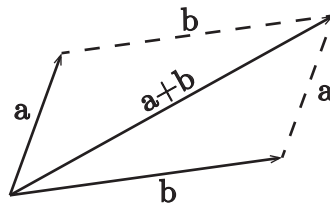


Abbildung 1.5: Addition von Vektoren

Algebraisch zeigt man dies komponentenweise:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Die Vektoraddition ist assoziativ, d.h. es gilt: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

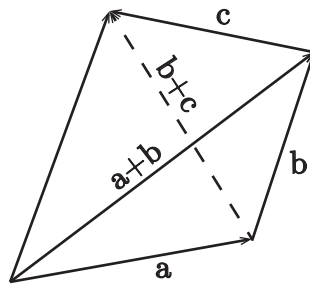


Abbildung 1.6: Assoziativität der Vektoraddition

Antiparalleler Vektor : $-\mathbf{a}$

Subtraktion

Subtraktion eines Vektors $\mathbf{b}$ bedeutet Addition mit $-\mathbf{b}$, d.h.:

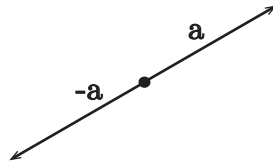


Abbildung 1.7: Antiparallele Vektoren

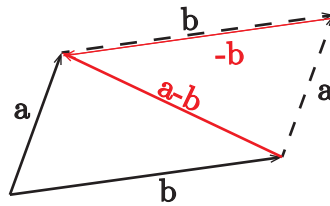


Abbildung 1.8: Subtraktion von Vektoren

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Mathematisch: Die Gesamtheit der Vektoren bilden eine (kommutative) Gruppe (neutrales Element: Nullvektor $\mathbf{0}$, inverses Element: antiparalleler Vektor $-\mathbf{a}$).

Multiplikation

Zwischen Vektoren können Multiplikationen definiert werden:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ inneres oder Skalarprodukt (*dot product*)
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ äußeres, Kreuz- oder Vektorprodukt (*cross product*)

(Außerdem: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ Tensorprodukt, wird vorerst nicht benötigt)

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \vartheta$$

Das Skalarprodukt entspricht der Projektion der Vektoren aufeinander.

andere Schreibweisen: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$

Das Skalarprodukt ist distributiv: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Zwei endliche Vektoren mit verschwindendem Skalarprodukt sind orthogonal zueinander, denn:

$$a \neq 0, b \neq 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \cos \vartheta = 0, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

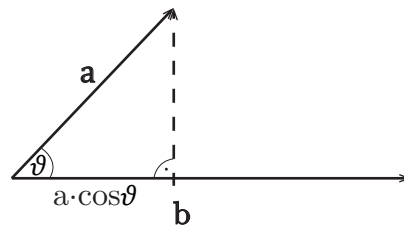


Abbildung 1.9: Veranschaulichung zum Skalarprodukt

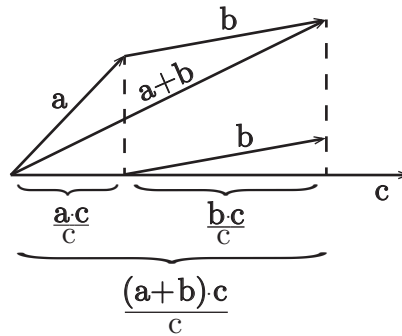


Abbildung 1.10: Distributivität des Skalarproduktes

Weiterhin gilt:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \cos \vartheta = 1 \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man also Längen messen. Angewendet auf $\hat{\mathbf{e}}_i$:

$$\hat{\mathbf{e}}_i^2 = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{Kronecker-Symbol}$$

Berechnung des Skalarproduktes aus den Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \dots \quad (9 \text{ Terme}) \\ &= \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \end{aligned}$$

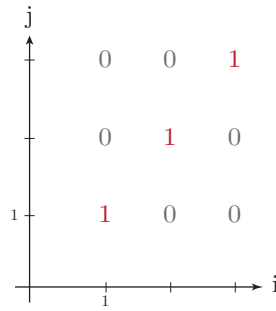


Abbildung 1.11: Veranschaulichung des Kronecker-Symbols

Eine etwas elegantere Variante zur Berechnung des Skalarprodukts ist folgende:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3
 \end{aligned}$$

Anmerkung Das Kronecker-Symbol macht aus der Doppelsumme eine Einfachsumme.

Mit dem Skalarprodukt kann man neben Längen auch Winkel messen:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a b}$$

Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ordnet zwei Vektoren einen dritten zu: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Der neue Vektor ergibt sich aus zwei Regeln:

1. $c = ab \sin \vartheta$ mit $\vartheta = \angle(a, b)$
 Der Betrag c entspricht dem Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
2. $\mathbf{c}$ steht senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und zwar so, dass $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein Rechtssystem bilden. Diese Regel macht nur in drei Dimensionen Sinn.

Das Vektorprodukt stellt einen Drehsinn dar.

Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ (im Gegensatz zum Skalarprodukt):

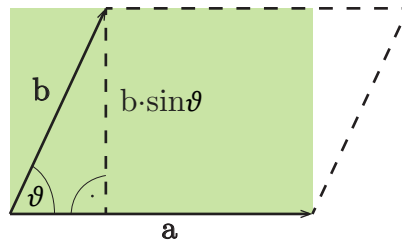


Abbildung 1.12: Veranschaulichung des Vektorproduktes

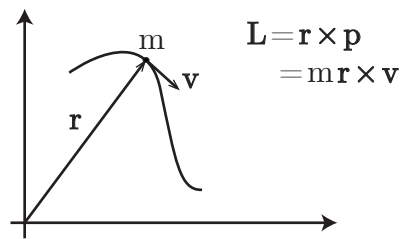


Abbildung 1.13: Physikalisches Beispiel: Drehimpuls L

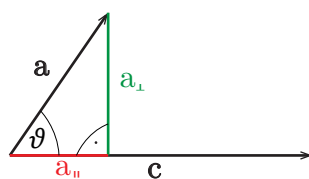
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Zwei endl. Vektoren mit verschwindendem Vektorprodukt sind kollinear, denn:

$$a \neq 0, b \neq 0, \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \sin \vartheta = 0, \vartheta = 0, \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Das Vektorprodukt ist distributiv (wie SP): $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

Beweis: Wir zerlegen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bezüglich $\mathbf{c}$:



$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp} \end{aligned}$$

 Abbildung 1.14: Zerlegung von $\mathbf{a}$ bzgl. $\mathbf{c}$

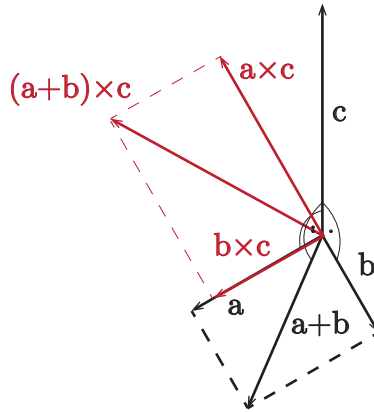
Behauptung: $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) \times \mathbf{c} \stackrel{!}{=} \mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{c}$

Unterbeweis:

$$1. \quad |\mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{c}| = a_{\perp} \cdot c \cdot \sin \frac{\pi}{2} = a_{\perp} \cdot c = a \cdot \sin \vartheta \cdot c = |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|$$

2. Die Richtung von $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ und $\mathbf{a}_\perp \times \mathbf{c}$ stimmen überein.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A) nehmen wir an, dass $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht zu $\mathbf{c}$ stehen.



$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \end{array} \right\}$ ist auch in der
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – Ebene
 um 90° gedreht

Abbildung 1.15: Veranschaulichung zum Beweis der Distributivität

$\Rightarrow$ Das Kreuzprodukt mit $\mathbf{c}$ dreht die Richtungen aller drei Vektoren in der $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -Ebene um 90° . Teilung durch c bewirkt, dass die Längen unverändert bleiben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] &= \frac{1}{c}[(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \\ \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \quad \quad q.e.d. \end{aligned}$$

Bemerkung Der Beweis ist ähnlich wie beim Skalarprodukt, Projektion wird durch Rotation ersetzt.

Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Lineare Unabhängigkeit und ONS

Wenn zwei Vektoren parallel (*kollinear*) sind, dann gibt es reelle Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$, so dass: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind *linear abhängig*.

Allgemein: n -Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, falls die Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$ nur durch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ erfüllt werden kann. Andernfalls nennt man sie *linear abhängig*.

Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren und höchstens so groß wie die Raumdimension. In einem n -dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren

eine *Basis*, d.h. jeder beliebige Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden. Normalerweise konstruiert man dafür ein *Orthonormalsystem* (ONS): $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$. Der gleiche Vektor kann in verschiedenen ONS dargestellt werden:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^3 \bar{a}_j \bar{\hat{\mathbf{e}}}_j$$

Insbesondere gilt dies für die Einheitsvektoren selbst:

$$\begin{aligned} \bar{\hat{\mathbf{e}}}_j &= \sum_{k=1}^3 d_{jk} \hat{\mathbf{e}}_k \\ \Rightarrow \bar{\hat{\mathbf{e}}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_m &= \sum_{k=1}^3 d_{jk} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_m = d_{jm} = \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \bar{\hat{\mathbf{e}}}_j \\ \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \bar{\hat{\mathbf{e}}}_i &= \sum_{j=1}^3 \bar{a}_j \bar{\hat{\mathbf{e}}}_j \cdot \bar{\hat{\mathbf{e}}}_i = \bar{a}_i = \sum_{k=1}^3 a_k \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \bar{\hat{\mathbf{e}}}_i = \boxed{\sum_{k=1}^3 d_{ik} a_k = \bar{a}_i} \end{aligned}$$

Für ONS gibt es also eine lineare Abbildung zwischen den Komponenten.

$D = (d_{ik})_{1 \leq i,j \leq 3}$ ist eine *Drehmatrix*.

Determinante

Die *Determinante* ordnet einer quadratischen Matrix einen Skalar zu.

$$\text{Sei } A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\text{Permutation } P} \text{sign}(P) a_{1P(1)} \cdots a_{nP(n)}$$

Von einer Menge $\{1, \dots, n\}$ gibt es $n!$ Permutationen.

Für eine Matrix mit $n=2$ ergibt sich:

$$\det A = \text{sign}(12) a_{11} a_{22} + \text{sign}(21) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Für eine Matrix mit $n=3$ ergibt sich:

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Dabei erkennt man in den Klammern wieder zweidimensionale Determinanten. Hier handelt es sich um die Entwicklung der dreidimensionalen Determinanten nach der ersten Reihe. Generell kann man nach jeder Reihe oder Spalte entwickeln und man wählt immer diejenige, die am meisten Nullen enthält.

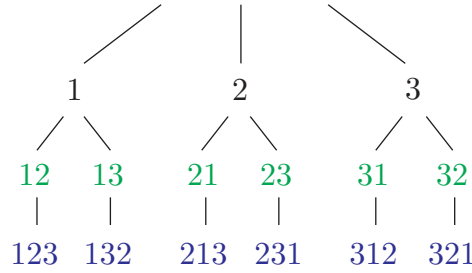


Abbildung 1.16: In $n = 3$ gibt es $3! = 6$ Permutationen.

Das Levi-Civita-Symbol

Für die kartesischen Basisvektoren haben wir

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$$

Außerdem gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$$

Damit folgt

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k) =: \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklisch zu } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ antizyklisch zu } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das *Levi-Civita-Symbol* ε_{ijk} ist der komplett antisymmetrische Tensor dritter Stufe. Es kann folgendermaßen durch Kronecker-Symbole ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm} &= \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \\ &= \delta_{k1} \det \begin{pmatrix} \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{pmatrix} + \delta_{k2} \det \begin{pmatrix} \delta_{l3} & \delta_{l1} \\ \delta_{m3} & \delta_{m1} \end{pmatrix} + \delta_{k3} \det \begin{pmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \\ \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Levi-Civita-Symbol kann man jetzt schreiben:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k$$

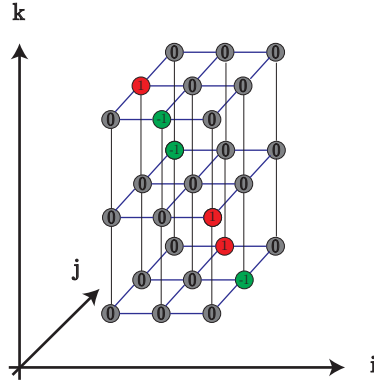


Abbildung 1.17: Veranschaulichung zum Levi-Civita-Symbol

Die Determinante einer 3×3 Matrix kann unter Verwendung des Levi-Civita Symbols folgendermaßen geschrieben werden:

$$\det A = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Berechnung des Vektorproduktes mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols

Für das Kreuzprodukt ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 c_k \hat{\mathbf{e}}_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j}$$

Ausschreiben in die einzelnen Komponenten ergibt somit:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_k = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

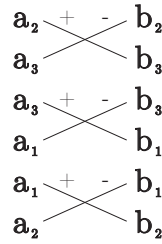


Abbildung 1.18: Merkregel zur Berechnung des Vektorproduktes

Höhere Vektorprodukte

Doppelkreuzprodukt : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Spatprodukt : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Der Betrag des Spatproduktes ist das Volumen des Parallelepipeds, das von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannt wird.

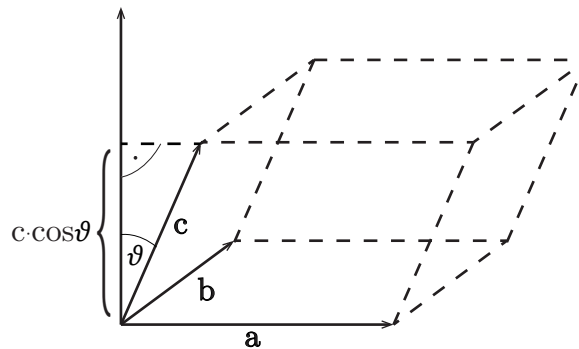


Abbildung 1.19: Spatprodukt als Volumen eines Parallelepipeds

Vorzeichen: $+$ $\rightarrow$ Rechtssystem, $-$ $\rightarrow$ Linkssystem.

Folgende Beziehungen lassen sich beweisen:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Die letzte Beziehung ist als *Entwicklungssatz* oder *BAC-CAB-Regel* bekannt.

Ausblick zu Tensoren

Bisher wurden Skalare, Vektoren und Matrizen unterschieden. Tatsächlich lassen sich diese Begriffe vereinheitlichen.

Definition: Ein *Tensor* ist eine multilineare Abbildung, die invariant unter Drehungen und Drehspiegelungen ist. Ein Tensor n-ter Stufe im $\mathbb{R}^3$ ist eine indizierte Größe mit n Indizes. Er hat also 3^n Komponenten.

Tensor 0. Stufe $\rightarrow$ Skalar

Tensor 1. Stufe $\rightarrow$ Vektor

Tensor 2. Stufe $\rightarrow$ Matrix

Ein Tensor 2. Stufe ist also mehr als eine Matrix $\underline{T}$ mit Komponenten t_{ij} . Die lineare Abbildung $\mathbf{b} = \underline{T}\mathbf{a}$ muss invariant sein unter einer Drehung, die durch die Drehmatrix $\underline{R}$ beschrieben wird. Die führt auf die Bedingung $\underline{T}' = \underline{R}\underline{T}\underline{R}^{-1}$.

Ein einfaches Beispiel ist das *direkte Produkt* zweier Vektoren definiert durch

$$t_{ij} = a_i b_j \Rightarrow \underline{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich zu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (Skalarprodukt) und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (Vektorprodukt) haben wir also noch $\underline{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ (direktes Produkt) als mögliche Verknüpfung zweier Vektoren. Dabei entsteht jeweils ein Tensor anderer Stufe. Andere Beispiele für Tensoren:

$$\begin{array}{ll} \delta_{ij} & \text{Tensor 2.Stufe} \\ \varepsilon_{ijk} & \text{Tensor 3.Stufe} \\ \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} & \text{Tensor 4.Stufe, durch Verjüngung eines Tensors 6. Stufe gewonnen} \end{array}$$

In der Physik gibt es viele Tensoren, wichtige Beispiele sind der Trägheitstensor in der Klassischen Mechanik und der Spannungstensor in der Elastizitätstheorie.

1.4 Mathematischer Einschub 2: Vektoranalysis

Verschiedene Trajektorien $\mathbf{r}(t)$ können zur gleichen *Raumkurve* führen.

Raumkurve = Menge aller Punkte $\{\mathbf{r}(t) | t_1 \leq t \leq t_2\}$

Die vektorwertige Funktion $\mathbf{r}(t)$ ist nur eine mögliche *Parametrisierung* der Raumkurve. Die gleiche Raumkurve könnte auch doppelt so schnell oder in umgekehrter Richtung durchlaufen werden.

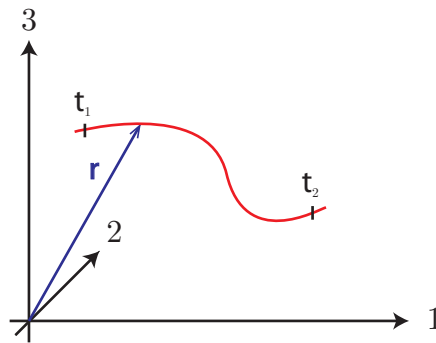


Abbildung 1.20: Veranschaulichung einer Raumkurve

Beispiele für Raumkurven

1) Kreisbewegung in der x-y Ebene

Die Funktion

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\varphi = \omega t}{=} \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine mögliche Parametrisierung der Kreisbewegung.

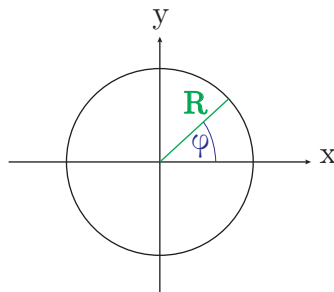


Abbildung 1.21: Raumkurve einer Kreisbewegung

Der Umlauf eines Kreises beträgt 2π und es gilt:

$$2\pi = \omega T \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\left[\begin{array}{l} T \\ \omega \end{array} \right]$ Periode
Kreisfrequenz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = R\omega$$

2) Schraubenlinie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ bt \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} b \\ z_0 = b \frac{2\pi}{\omega} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeit in } z\text{-Richtung} \\ \text{Ganghöhe} \end{array}$$

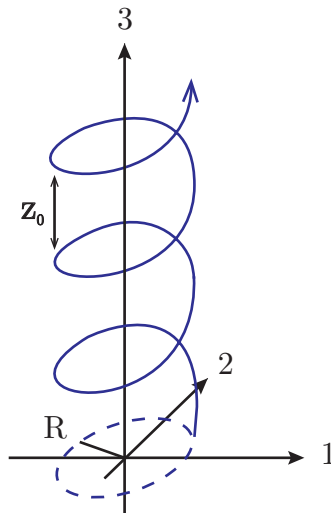


Abbildung 1.22: Raumkurve einer Schraubenlinie

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} \geq R\omega$$

Um die Raumkurve einer Schraubenlinie zu simulieren, kann man folgende Code benutzen:

```
1 helix[t_] := {r Cos[t], r Sin[t], b t}
2 r = 1; b = 0.1; tmax = 2 Pi;
3 ParametricPlot3D[helix[t], {t, 0, tmax}]
```

Bogenlänge

Was ist die Länge L einer Raumkurve (*Bogenlänge*)?

Sie sollte auf jeden Fall unabhängig von der gewählten Parametrisierung sein!

Wir zerlegen das Intervall $[t_0, t_n]$ in n Teilintervalle der Länge

$$\Delta t = \frac{t_n - t_0}{n} \Rightarrow t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$$

Approximation durch Polygonzug:

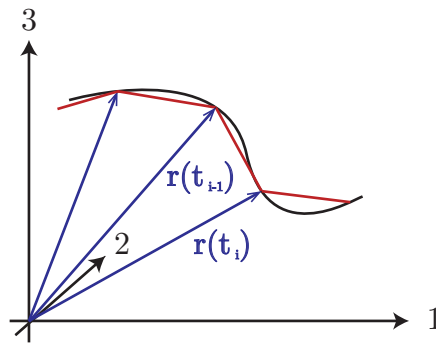


Abbildung 1.23: Approximation einer Raumkurve

$$L = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{\Delta t} \right| \Delta t \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt$$

Invarianz unter Umparametrisierung: neue Parametrisierung durch u

$$t = t(u) \Rightarrow L = \int \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| \left| \frac{du}{dt} \right| dt \stackrel{\text{Substitutions-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \int \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du \checkmark$$

Bogenlänge als Funktion der Zeit:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right| dt'$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| > 0 \quad \text{bei Bewegung: Bogenlänge wächst monoton}$$

$$\Rightarrow \text{Umkehr ist eindeutig, } t = t(s)$$

$\Rightarrow$ Parametrisierung nach der Bogenlänge oder natürliche Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$$

Beispiele

1. Kreisbewegung

$$v = R \cdot \omega = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = R \omega t \Rightarrow t = \frac{s}{R\omega}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Umlauf entspricht $s = 2\pi R$, also genau dem Umfang.

2. Schraubenlinie

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{ds}{dt} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow s = v \cdot t \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} R \cos \frac{\omega s}{v} \\ R \sin \frac{\omega s}{v} \\ \frac{bs}{v} \end{pmatrix}$$

Begleitendes Dreibein

Auch das Koordinatensystem kann auf die Bahnkurve bezogen werden:
begleitendes Dreibein = ONS, das mit dem Massenpunkt mitwandert

$\hat{\mathbf{t}}$ Tangentialeinheitsvektor

$\hat{\mathbf{n}}$ Normaleneinheitsvektor

$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ Binormaleneinheitsvektor

$\Rightarrow$ Rechtssystem, $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ sind Funktionen der Bogenlänge s . Regeln für die

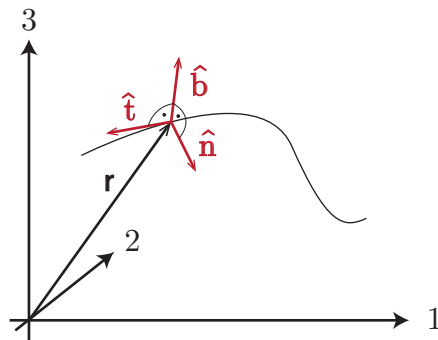


Abbildung 1.24: begleitendes Dreibein

Ableitung von zeitabhängigen Vektoren:

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{a}(t)] = \dot{f}(t)\mathbf{a}(t) + f(t)\dot{\mathbf{a}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)$$

Die Beweise erfolgen komponentenweise.

Beweis Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}(t)$ ist orthogonal zu seiner Ableitung $\dot{\mathbf{e}}(t)$

$$\hat{\mathbf{e}}(t)^2 = \mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \dot{\mathbf{e}}(t) \cdot \mathbf{e}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}(t) \perp \hat{\mathbf{e}}(t)$$

Definition Tangentialeinheitsvektor

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\frac{ds}{dt}}$$

Bei Parametrisierung durch die Bogenlänge: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{ist automatisch normiert}$$

Im allgemeinen Fall ändert $\hat{\mathbf{t}}(s)$ seine Richtung:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}(s) \right| =: \kappa(s) \quad \text{Krümmung}, \quad \rho := \frac{1}{\kappa} \quad \text{Krümmungsradius}$$

Beispiele

1. Kreisbewegung

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| = \frac{1}{R}, \quad \rho = R \quad (\text{hängt nicht von } s \text{ ab})$$

2. Schraubenlinie

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega}{v} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{R\omega}{v} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{b}{v} \end{pmatrix} \quad v = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}$$

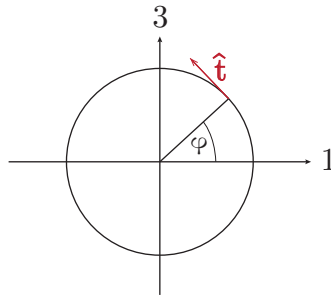


Abbildung 1.25: Veranschaulichung des Tangentialeinheitsvektors

$$\text{Überprüfung: } |\hat{\mathbf{t}}|^2 = \frac{R\omega^2}{v^2} + \frac{b^2}{v^2} = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{R\omega^2}{v^2} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\frac{R\omega^2}{v^2} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{R\omega^2}{v^2} = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + b^2} = \frac{1}{R + \frac{b^2}{R\omega^2}} < \frac{1}{R}$$

$$\rho = R + \frac{b^2}{R\omega^2} > R \quad \text{für } b \neq 0$$

Die Krümmung der Schraubenlinie ist kleiner als beim Kreis (der Krümmungsradius ist größer), weil die Bahnkurve gestreckt wurde.

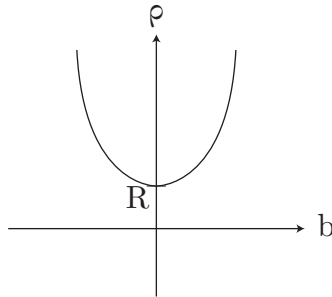


Abbildung 1.26: Krümmungsradius einer Schraubenlinie

Definition Normaleneinheitsvektor

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$$

Die von $\hat{\mathbf{t}}$ und $\hat{\mathbf{n}}$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegeebene*. Erfolgt die Bewegung in einer festen Ebene, dann ist dies die Schmiegeebene. Im allgemeinen Fall dreht sich das Dreibein aus der Schmiegeebene heraus. Dann ändert sich auch der Binormaleneinheitsvektor.

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \times \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}} \times \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{t}}$$

Außerdem gilt:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{b}} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{da ONS})$$

τ *Torsion* oder *Windung*

$\sigma = \frac{1}{\tau}$ *Torsionsradius*

Bewegungsgleichungen für das Dreibein:

$$\boxed{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}}, \quad \boxed{\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}}}$$

Was ist mit $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}$?

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{t}} &= -\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \stackrel{\text{Entwicklungs-}}{\text{satz}} = -(\hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}})) = \hat{\mathbf{n}} \\ \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} &= \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{b}} \times \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -\tau (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}) + \kappa (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}}} & \quad \text{Frenet'sche Formeln} \end{aligned}$$

Allgemeine Formeln (ohne Beweis): Falls keine Parametrisierung nach der Bogenlänge möglich ist, kann man diese Formeln anwenden.

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}')}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

Bei Parametrisierung nach der Bogenlänge ergibt sich:

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{r}}|, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}')}{\kappa^2}$$

Begleitendes Dreibein

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right| dt' \xrightarrow{\text{Umkehr}} t = t(s) \quad (\text{In Bahnkurve einsetzen})$$

Tangentialeinheitsvektor und Krümmung:

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \xrightarrow{\text{Krümmung}} \kappa(s) := \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}(s) \right|$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$

Binormaleneinheitsvektor und Torsion:

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \xrightarrow{\text{Torsion}} \tau := \left| \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \right|$$

Merkregel Frenet'sche Formeln: Um sich die Frenet'schen Formeln zu merken kann man sie in Matrix-Form aufschreiben.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \\ \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \\ \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

Ohne Beweis: Krümmung und Torsion sind invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung. Bei einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung bleibt κ gleich und τ ändert sein Vorzeichen.

Beispiele

1. Kreisbewegung $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{e}}_3$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

2. Schraubenlinie

$$\text{Normalenvektor } \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{wie bei Kreisbewegung})$$

$$\text{Binormalenvektor } \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{b}{v} \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ -\frac{b}{v} \cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) \\ \frac{R\omega}{v} \end{pmatrix} \neq \hat{\mathbf{e}}_3 \text{ f\"ur } b \neq 0$$

$$\text{Torsion } \tau = \frac{b\omega}{v^2} = \frac{b\omega}{R^2\omega^2 + b^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} 0$$

3. Geradlinige Bewegung: $\kappa = \tau = 0$

4. Wurfparabel: $\tau = 0$

5. Elliptische Schraubenlinie:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega t) \\ a_2 \sin(\omega t) \\ bt \end{pmatrix}$$

6. Zykloide

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} R\varphi + R \sin \varphi \\ R + R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi + \sin \varphi \\ 1 + \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

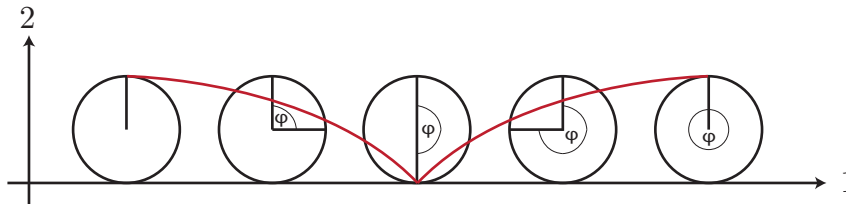


Abbildung 1.27: Zykloide

7. Gekrümmte Schraubenlinie: Bewegung auf der Oberfläche eines Torus

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (a + R \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (a + R \cos \vartheta) \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{z.Bsp: } \varphi = \omega_1 t, \quad \vartheta = \omega_2 t$$

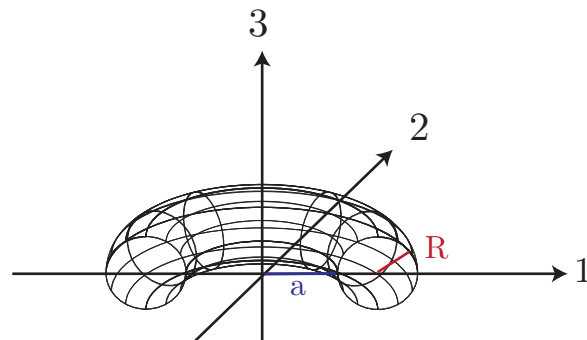


Abbildung 1.28: Torus

Exkurs: Anwendungen von Raumkurven außerhalb der Klassischen Mechanik

1. Polymerphysik

Polymere sind Kettenmoleküle, z.Bsp. Polyethylen (PE) $\left[\begin{array}{cc} H & H \\ | & | \\ -C & -C- \\ | & | \\ H & H \end{array} \right]_n$

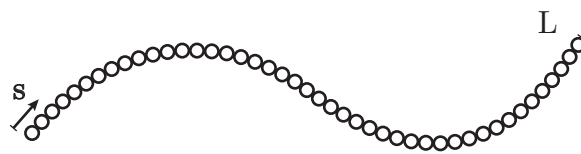


Abbildung 1.29: Polymer als Kette

Bogenlänge L = Länge des Polymers

Energie des Polymers: Funktion von L, κ, τ

Wichtigstes Modell in der Polymerphysik: *semiflexible Kette*

$$\mathcal{H} = \frac{k}{2} \int_0^L ds \kappa(s)^2 = \frac{k}{2} \int_0^L ds \left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right)^2 \quad (\text{KRATKY und POROD '49})$$

k Biegesteifigkeit (elastische Konstante)

$|\hat{\mathbf{t}}| = 1$ Parametrisierung nach der Bogenlänge ($L = \text{const}$)

2. Superstringtheorie

Dimension $d = 1$ (Zeit) + 9 (Raum) = 10

Jedes Teilchen ist ein eindimensionales Objekt im Raum (*String*). Strings

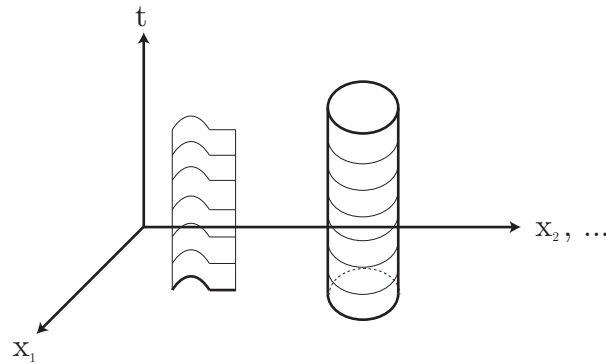


Abbildung 1.30: Weltflächen in der Stringtheorie.

können offen oder geschlossen sein.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau ds \sqrt{-\gamma}$$

S	$Wirkung$ (skalare Größe)
τ	Zeit
s	Bogenlänge
T_0	Spannung
c	Lichtgeschwindigkeit
γ	Metrik

Hierbei handelt es sich um ein Integral über *Weltflächen*.

Um sich das Dreibein besser vorstellen zu können, kann man den folgenden Wolfram Mathematica (unten findet man eine kurze Einführung) Code verwenden:

```

1  (*Parameter fuer die Schraubenlinie*)
2  r = 1; (*Radius der Helix*)
3  b = 0.2; (*Steigung der Helix*)
4  tmax = 8 Pi; (*Maximale Laenge der Helix*)
5
6  (*Schraubenlinie in vektorielle Form*)
7  helix[t_] := {r Cos[t], r Sin[t], b t}
8
9  (*Ableitungen zur Berechnung des Frenet-Dreibeins*)
10 Tangentx[t_] :=
11 Evaluate[D[helix[t], t]/Norm[D[helix[t], t]]] (*
Tangentenvektor*)
12 Normalx[t_] :=
13 Evaluate[
14 D[helix[t], {t, 2}]/Norm[D[helix[t], {t, 2}]]] (*
Normalenvektor*)

```

```

15 Binormalx[t_] := Cross[Tangentx[t], Normalx[t]] (*
    Binormalenvektor*)
16
17 (*Manipulate zur Darstellung eines Teilchens mit Frenet-
    Dreibein auf \
18 der Helix*)
19 Manipulate[
20 Module[{helixPlot, particlePosition, tangentVec, normalVec,
21 binormalVec, particlePos},(*Schraubenlinie*)
22 helixPlot =
23 ParametricPlot3D[helix[t], {t, 0, tmax},
24 PlotStyle -> {Thick, Blue}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
25 Boxed -> False, PlotRange -> All, Mesh -> None];
26 (*Position des Teilchens*)particlePos = helix[tPart];
27 particlePosition =
28 Graphics3D[{Red,
29 Sphere[particlePos, 0.1]} (*Teilchen als rote Kugel*)];
30 (*Tangenten-,Normalen-und Binormalenvektor berechnen*)
31 tangentVec = Arrow[{particlePos, particlePos + Tangentx[tPart
    ]}];
32 normalVec = Arrow[{particlePos, particlePos + Normalx[tPart
    ]}];
33 binormalVec = Arrow[{particlePos, particlePos + Binormalx[
    tPart]}];
34
35 (*Darstellung der Vektoren (Tangente, Normale, Binormale)*)
36 vectors =
37 Graphics3D[{{Green, tangentVec},(*Tangentenvektor*){Blue,
38 normalVec},(*Normalenvektor*){Purple,
39 binormalVec} (*Binormalenvektor*)}];
40 (*Kombiniere die Helix, das Teilchen und das Frenet-Dreibein*)
41 Show[helixPlot, particlePosition,
42 vectors]],(*Slider fuer den Parameter tPart*){{tPart, 0}, 0,
    tmax,
43 Appearance -> "Labeled"]}

```

Kurze Einführung in Wolfram Mathematica: Es ist eine Software für numerische Berechnungen, Datenvisualisierung und technische Programmierung. Als Student der Universität kann man es kostenlos herunterladen und benutzen. Detaillierte Beschreibung findet man hier: <https://www.urz.uni-heidelberg.de/de/service-katalog/software-und-anwendungen/mathematica>.

1.5 Von Beschleunigung zu Bahnkurve

Da die Beschleunigung als die zweifache Ableitung der Bahnkurve folgt, muss die Umkehrung eine zweifache Integration sein.

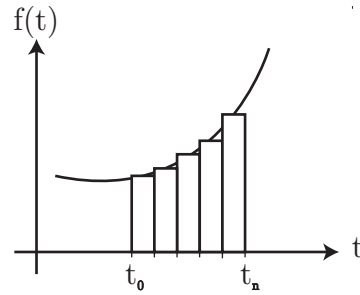
Integral einer Funktion $f(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta t f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)$$

Geometrisch handelt es sich um den Flächeninhalt unter der Kurve.

Beziehung zur Ableitung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' f(t') &= f(t) \\ \int_{t_0}^{t_n} \frac{df(t)}{dt} dt &= f(t_n) - f(t_0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Hauptsatz der Differential-} \\ \text{und Integralrechnung} \end{array}$$



Die Übertragung auf vektorwertige Funktionen erfolgt wieder komponentenweise:

$$\int_{t_0}^{t_n} \mathbf{r}(t) dt = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_n} x_1(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_n} x_2(t) dt \\ \int_{t_0}^{t_n} x_3(t) dt \end{pmatrix}$$

Für einen Massenpunkt haben wir also:

1. Ortsvektor

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i$$

2. Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i$$

3. Beschleunigungsvektor

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i$$

Um den Beschleunigungsvektor (komponentenweise) integrieren zu können, benötigen wir noch Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{v}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}(t_0) = \text{const.} = \mathbf{r}_0$$

Gegeben: $\mathbf{a}(t)$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'')$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \left[\int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{a}(t'') \right]}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann durch Ableitung überprüft werden:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t dt'' \mathbf{a}(t'')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) \quad \checkmark$$

Auch die Anfangsbedingungen stimmen:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad \checkmark$$

Beispiele

1. verschwindende Beschleunigung: $\mathbf{a}(t) = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0)$$

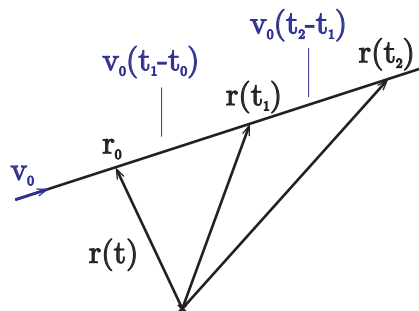


Abbildung 1.31: geradlinige Bewegung

geradlinig: in Richtung von $\mathbf{v}_0$

gleichförmig: in gleichen Intervallen werden gleiche Strecken zurückgelegt.

Beispiel: Raumschiff

2. konstante Beschleunigung: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$

$$\Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \mathbf{a}_0(t' - t_0) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{a}_0\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - (t - t_0)t_0\right) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

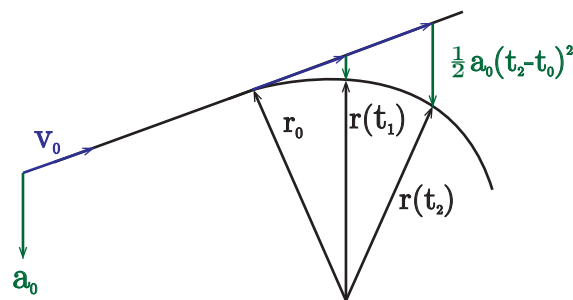


Abbildung 1.32: Wurfparabel bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist die Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit $\mathbf{v}_0$ und einer geradlinig beschleunigten Bewegung mit $\mathbf{a}_0$.

Beispiel: Schneeball, Kanonenkugel

Ein Spezialfall ist der freie Fall:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_0 = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Fallstrecke } s = |\mathbf{x}_3(t)| = \frac{1}{2}gt^2$$

Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

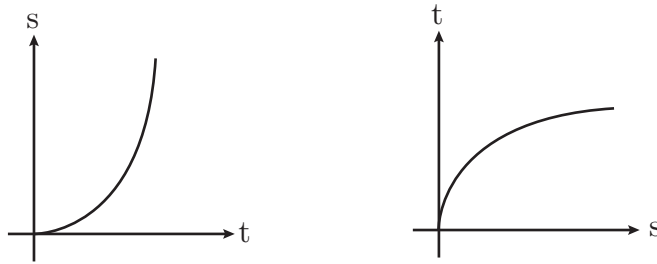


Abbildung 1.33: Weg-Zeit-Diagramm für freien Fall

1.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung im mitbewegten System

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{\mathbf{t}}v$$

⇒ Geschwindigkeitsvektor ist tangential

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v}\hat{\mathbf{t}} + v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \dot{v}\hat{\mathbf{t}} + v\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\frac{ds}{dt} \stackrel{\text{Frenet}}{=} \dot{v}\hat{\mathbf{t}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{n}}$$

Die Beschleunigung liegt also in der Schmiegeebene und hat 2 Anteile:

$$a_t = \dot{v} \quad \text{Tangentialbeschleunigung}$$

$$a_n = \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho} \quad \text{Normalbeschleunigung}$$

Eine Bewegung kann also beschleunigt sein, obwohl $\dot{v} = 0$. Dies spiegelt wieder, dass ein Vektor sowohl Betrag als auch Richtung hat.

Beispiel

Kreisbewegung (gleichförmig)

$$a_t = \frac{d}{dt}(R\omega) = 0 \quad \text{da } \omega = \text{const.}$$

$$a_n = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2 \quad \text{Zentrifugalbeschleunigung}$$

Physikalische Probleme haben oft räumliche Symmetrien, die man ausnützen kann, um Geschwindigkeit und Beschleunigung auszurechnen.

1.7 Mathematischer Einschub 3: Koordinatensysteme

Wenn möglich, verwendet man ein Koordinatensystem, das der Symmetrie des Problems angepasst ist. Der Übergang von einem Koordinatensystem ins andere muss wohldefiniert sein. Die drei wichtigsten Fälle werden nun vorgestellt:

1. kartesische Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Hier muss man zwischen dem Betrag ρ in der x-y-Ebene und dem Gesamtbetrag $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ unterscheiden.

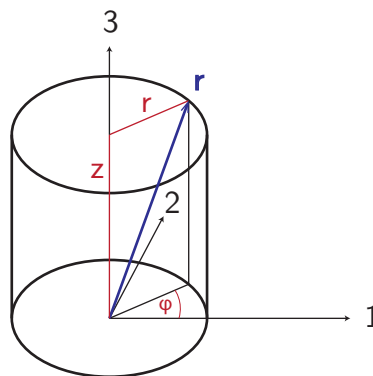


Abbildung 1.34: Zylinderkoordinaten

3. Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

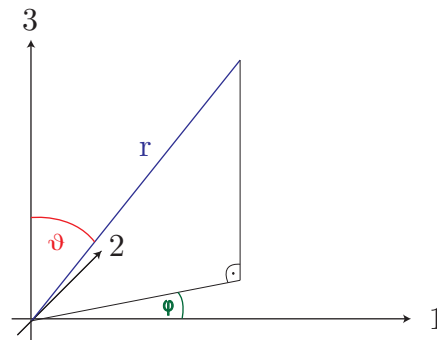


Abbildung 1.35: Kugelkoordinaten

Die drei Koordinatentupel (x_1, x_2, x_3) , (ρ, φ, z) und (r, ϑ, φ) beschreiben den gleichen Ort. Deshalb muss es Transformationen geben, die an (fast) jedem Punkt P (lokal) umkehrbar sind.

Dabei bedeutet:

für fast jeden Punkt: darf in Bereichen niedriger Dimension verletzt sein

lokal: gilt in einer Umgebung von P

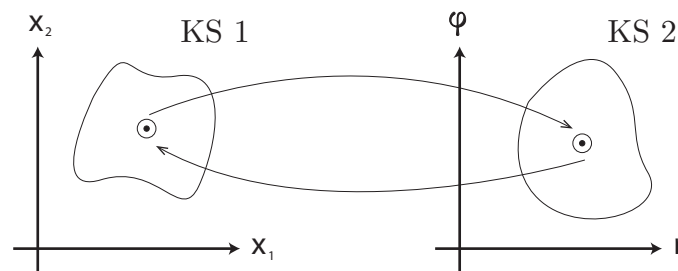


Abbildung 1.36: Veranschaulichung zur Koordinatentransformation

Beispiel

Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ bzw. Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$)

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \text{ für } x_1 > 0 \text{ (sonst } +\pi) \end{array}$$

$\Rightarrow$ alle Paare $(r = 0, \varphi)$ werden auf $x_1 = x_2 = 0$ abgebildet.

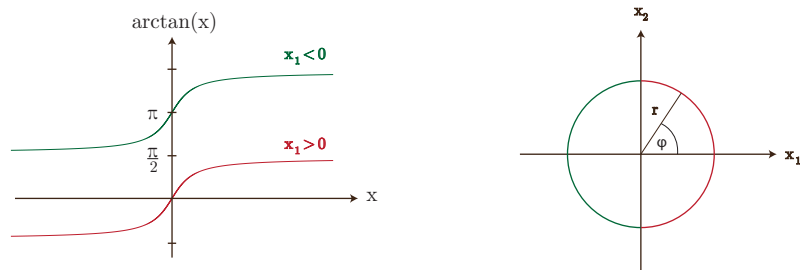


Abbildung 1.37: Berechnung des Winkels in Polarkoordinaten.

$\Rightarrow$ Umkehrung für $r = 0$ ist nicht eindeutig, aber das ist nur eine eindimensionale Ausnahme.

Wie stellt man die (lokale) Umkehrbarkeit sicher?

Wir betrachten eine allgemeine Variablentransformation

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad 1 \leq i \leq 3$$

Differentielle Änderungen in x_i müssen eindeutig mit differentiellen Änderungen in y_i zusammenhängen (und umgekehrt). Wir betrachten dazu ein beliebiges skalares Feld $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, das z.B. für eines der y_i steht. Die Abhängigkeit von φ von einem der drei x_i wird durch eine *partielle Ableitung* charakterisiert:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

Bei einer partiellen Ableitung wird nur eine Variable geändert und die anderen bleiben fest. Die partielle Ableitung $\partial \varphi / \partial x_1$ beschreibt also die Änderung von φ parallel zur Koordinatenachse x_1 .

Andere Schreibweisen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{x_2, x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_2, x_3} = \partial_{x_1} \varphi = \partial_1 \varphi = \varphi_{x_1} = \varphi_1$$

Beispiel

Radius r in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r}$$

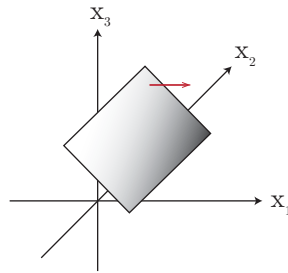


Abbildung 1.38: Veranschaulichung der partiellen Ableitung

Die Rechenregeln für die partiellen Ableitungen sind im wesentlichen gleich zu denen für normale Ableitungen. Die partielle Ableitung von Vektoren erfolgt wieder komponentenweise.

Beispiel

Coulomb- oder Gravitationskraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_1}{r^3} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r^3} - x_1 \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x_1}{r^5} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_1^2}{r^5} \right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_2}{r^3} \right) = -\frac{3\alpha x_2 x_1}{r^5} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha \cdot \frac{x_3}{r^3} \right) = -\frac{3\alpha x_3 x_1}{r^5} \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{r^5} \begin{pmatrix} r^2 - 3x_1^2 \\ -3x_1 x_2 \\ -3x_1 x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung von Vektorprodukten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Satz aus der Analysis (ohne Beweis)

Die gemischte partielle Ableitung ist vertauschbar (vorausgesetzt die Funktion ist zweimal stetig partiell differenzierbar):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Beispiel

$$\varphi = x_1^3 x_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^3) = 3x_1^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} (3x_1^2 x_2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \checkmark$$

Bisher haben wir die (x_1, x_2, x_3) nur in eine Richtung geändert. Wir ändern jetzt (x_1, x_2, x_3) mit Hilfe einer Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$, $\Delta x_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t)$.

$\Rightarrow$ Differentialquotient

$$\begin{aligned} D &= \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \\ &\quad + \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \\ &\quad + \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)] \\ &= \frac{1}{\Delta x_1} [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)] \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x_2} [\varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)] \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x_3} [\varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)] \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \\ &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \boxed{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}} \quad \text{totale Ableitung von } \varphi \text{ nach } t \end{aligned}$$

Vergleiche Kettenregel:

$$\frac{d\varphi(x(t))}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow$ Die totale Ableitung ist eine Verallgemeinerung der Kettenregel. Sie setzt sich additiv aus den Beiträgen der verschiedenen Koordinatenrichtungen zusammen.

Totale Ableitung und Nabla-Symbol

Die totale Ableitung kann auch als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla \varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

wobei $\nabla \varphi$ Gradient von φ , ∇ Nabla-Symbol

$$\nabla \varphi = \text{grad}(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Die drei Komponenten sind genau die drei partiellen Ableitungen.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Differentialoperator}$$

Wir schreiben jetzt die Änderung von φ so, dass sie unabhängig ist von der Parametrisierung der Raumkurve $\mathbf{r}(t)$:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} \quad \text{totales Differential}$$

Jetzt überlegen wir uns, in welche Richtung man $d\mathbf{r}$ legen muss, damit sich der Wert des Feldes nicht ändert, d.h. damit man eine Isolinie entlang geht:

$$0 = d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \nabla \varphi \perp d\mathbf{r}$$

Der Gradient steht also senkrecht auf den Flächen mit $\varphi = \text{const.}$ Er zeigt in die Richtung mit der größten Änderung in φ (*bergaufwärts*). Ein Beispiel wäre die Funktion

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{1 + r^2}$$

Diese Funktion ist rotationssymmetrisch und die Isolinien sind somit Kreise.

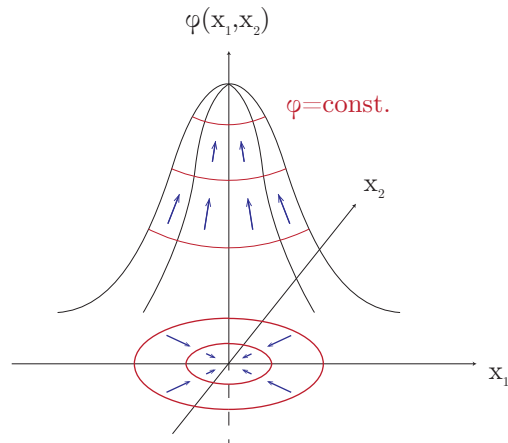


Abbildung 1.39: Gradient zu einer Funktion mit Maximum.

Beispiel

Radius r in Polarkoordinaten: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ \frac{x_2}{r} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{e}}_r$$

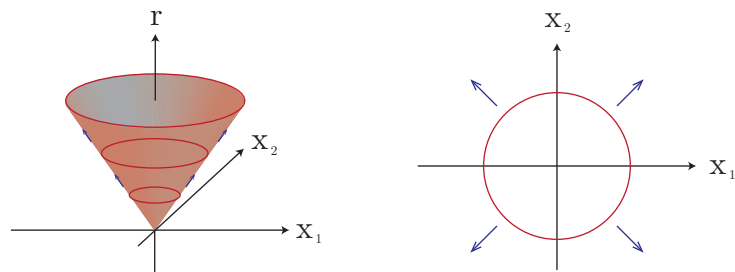


Abbildung 1.40: Gradient für den Radiusbetrag.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \cdot \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(r) = f'(r) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}$$

$$f(r) = r \Rightarrow \nabla f = \hat{\mathbf{e}}_r \quad \checkmark$$

Zurück zum ursprünglichen Problem: Wir betrachten eine Koordinatentransformation $y_i \rightarrow x_i$, für die wir die Umrechnungsformeln kennen (z.Bsp. Kugelkoordinaten: $(r, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$).

$$\stackrel{\text{totales}}{\Rightarrow}_{\text{Diff.}} \boxed{dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite wird eine Matrix mit einem Vektor multipliziert.

Matrixmultiplikation

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$$

wobei man die Komponente c_{ij} folgendermaßen berechnet:

$$\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

Voraussetzung für die Multiplikation zweier Matrizen ist: Zahl der Spalten in $\underline{\underline{A}} =$ Zahl der Zeilen in $\underline{\underline{B}} = r$. Das gilt also insbesondere, wenn eine $n \times n$ -Matrix mit einem n -Vektor multipliziert wird.

Die Matrix $\underline{\underline{J}} = (\frac{\partial x_i}{\partial y_j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ heißt **Funktionalmatrix** oder **Jacobimatrix**. Eine Umkehrung der Transformation $y_i \rightarrow x_i$ ist genau dann möglich, wenn die inverse Matrix $\underline{\underline{J}}^{-1}$ existiert.

$$\mathbf{x} = \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y}, \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$$

Jacobimatrix

$$\underline{\underline{J}} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

Satz zur Umkehrabbildung (ohne Beweis)

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert genau dann, wenn $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

$\Rightarrow$ Eine Koordinatentransformation ist genau dann lokal umkehrbar, wenn die *Funktional-* oder *Jacobideterminante* $J = \det \underline{\underline{J}} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \neq 0$.

Beispiele

1. Polarkoordinaten $(r, \varphi) \rightarrow (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (-r \sin \varphi) = r$$

$\Rightarrow$ Umkehrung möglich für $r \neq 0$

Dies stimmt auch mit unseren zuvor gewonnenen Erkenntnissen überein:
 $(r = 0, \varphi) \hat{=} (0, 0)$

2. Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = \rho$$

Umkehrung möglich wie bei Polarkoordinaten für $\rho \neq 0$.

Dieselbe Rechnung kann man in Wolfram Mathematica auch durchführen:

```
1 x1[rho_, phi_, z_] := rho*Cos[phi]
2 x2[rho_, phi_, z_] := rho*Sin[phi]
3 x3[rho_, phi_, z_] := z
```

```

4 ortsvektor[rho_, phi_, z_] := {x1[rho, phi, z], x2[rho, phi,
    z], x3[rho, phi, z]}
5 jacobiMatrix = D[ortsvektor[rho, phi, z], {{rho, phi, z}}]
6 jacobiDeterminant = Det[jacobiMatrix]
7 Simplify[jacobiDeterminant]
8

```

3. Kugelkoordinaten $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J = r^2 \sin \vartheta$$

Umkehrung möglich außer für $r = 0$ oder $\vartheta = 0, \pi$ (Nord- oder Südpol). Das sind genau die Fälle, bei denen φ aufgrund der Rotationssymmetrie um die z-Achse nicht eindeutig ist.

Man kann mit Wolfram Mathematica das Ergebnis überprüfen:

```

1 x1[r_, theta_, phi_] := *Sin[theta]*Cos[phi]
2 x2[r_, theta_, phi_] := r*Sin[theta]*Sin[phi]
3 x3[r_, theta_, phi_] := r*Cos[theta]
4 ortsvektor[r_, theta_, phi_] := {x1[r, theta, phi], x2[r,
    theta, phi], x3[r, theta, phi]}
5 jacobiMatrix = D[ortsvektor[r, theta, phi], {{r, theta, phi
    }}}
6 jacobiDeterminant = Det[jacobiMatrix]
7 Simplify[jacobiDeterminant]
8

```

Verkettung von Koordinatentransformationen

$$z_i \longrightarrow y_i \longrightarrow x_i$$

$$\Rightarrow x_i = x_i(y_1(z_1, z_2, z_3), y_2(z_1, z_2, z_3), y_3(z_1, z_2, z_3))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_j}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}^{(xz)} = \underline{\underline{J}}^{(xy)} \cdot \underline{\underline{J}}^{(yz)}$$

$$\Rightarrow \det \underline{\underline{J}}^{(xz)} = J^{(xz)} = \det \underline{\underline{J}}^{(xy)} \det \underline{\underline{J}}^{(yz)} = J^{(xy)} J^{(yz)}$$

Die Gesamttransformation ist eindeutig ($J^{(xz)} \neq 0$), wenn die Einzeltransformationen eindeutig sind ($J^{(yz)}, J^{(xy)} \neq 0$).

Spezialfall: $x_i = z_i$

$$\Rightarrow J^{(xx)} = 1$$

$$\Rightarrow J^{(xy)} = \frac{1}{J^{(yx)}}$$

$\Rightarrow$ Wenn die Hintransformation eindeutig ist, dann ist es auch die Rücktransformation.

Die Jacobi-Determinante hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Wir betrachten die *lokalen* Eigenschaften von Koordinatensystemen mit Hilfe von Bahnkurven und Dreibeinen.

Koordinatenlinie = Bahnkurve, die entsteht, wenn nur eine Variable y_i variiert wird.

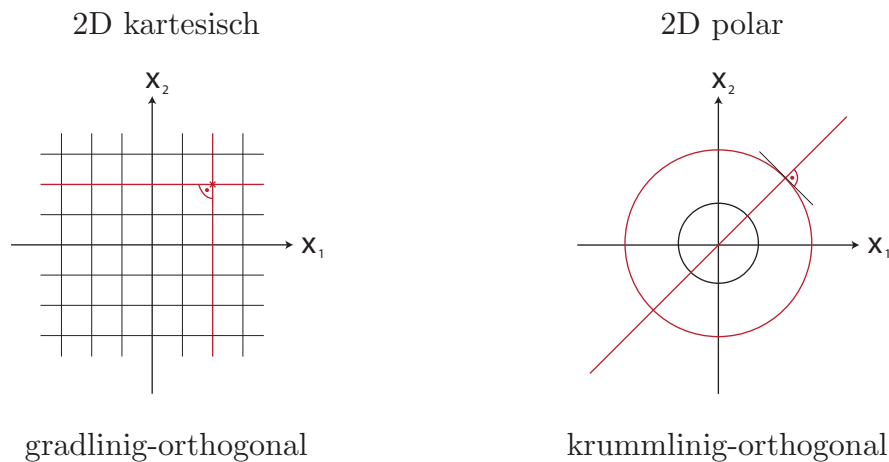


Abbildung 1.41: Beispiele von Koordinatenlinien

An jedem Ort im Raum definiert das Koordinatensystem also ein lokales Dreibein. Dieses wird aufgespannt von den drei Einheitsvektoren:

$$\hat{\mathbf{e}}_{y_i} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \text{ mit } b_{y_i} := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \right|$$

Beispiele

1. Polarkoordinaten (r, φ)

$$b_r = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$b_\varphi = r, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

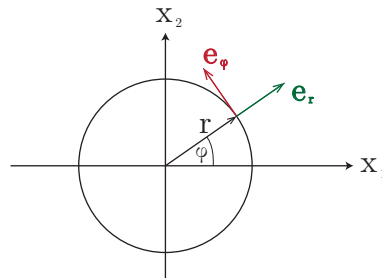


Abbildung 1.42: Basisvektoren bei Polarkoordinaten

2. Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

ρ, φ wie bei Polarkoordinaten, nur dass wir jetzt ρ statt r verwenden.

$$b_z = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$b_r = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$b_\vartheta = r, \quad \hat{\mathbf{e}}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$b_\varphi = r \sin \vartheta, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

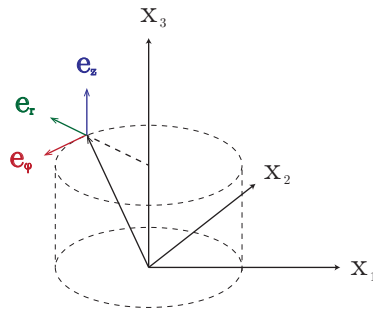


Abbildung 1.43: Basisvektoren bei Zylinderkoordinaten

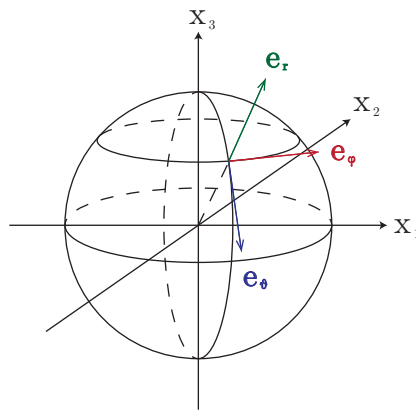


Abbildung 1.44: Basisvektoren bei Kugelkoordinaten

In allen drei Fällen gilt $\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j} = \delta_{ij}$ (Orthonormalsysteme).
Das lokale Dreibein definiert ein lokales Volumenelement: Wir berechnen das Volumen des Parallelepipeds, das von

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = b_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i} dy_i$$

aufgespannt wird.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow dV &= \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= J dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} \hat{\mathbf{e}}_{y_1} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_{y_2} \times \hat{\mathbf{e}}_{y_3}) dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} dy_1 dy_2 dy_3
 \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet: skalare Faktoren können zeilenweise aus der Determinante rausgezogen werden, das Transponieren ändert die Determinante nicht und das Spatprodukt eines ONS ist gleich 1. Das Ergebnis ist, dass die Jacobi-Determinante genau dem Volumenelement entspricht. Sie hängt mit den b_{y_i} über die einfache Beziehung

$$J = b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}$$

zusammen. Statt eine komplizierte Determinante auszurechnen, reicht es also, die drei Gewichte auszurechnen und miteinander zu multiplizieren.

Beispiele

1. Polarkoordinaten

In zwei Dimensionen haben wir kein Volumen-, sondern ein Flächenelement:

$$dA = dr d\varphi r$$

Damit ergibt sich für die Kreisfläche A :

$$A = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi r = \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{1}{2} R^2 2\pi = \pi R^2$$

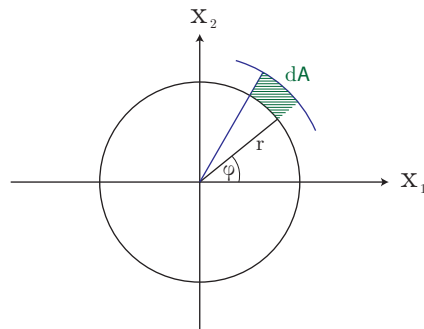


Abbildung 1.45: Flächenelement in Polarkoordinaten

2. Zylinderkoordinaten

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Damit ergibt sich für das Zylindervolumen V :

$$V = \left(\int_0^R \rho d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^L dz \right) = \frac{1}{2} R^2 2\pi L = \pi R^2 L$$

3. Kugelkoordinaten

$$dV = dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta$$

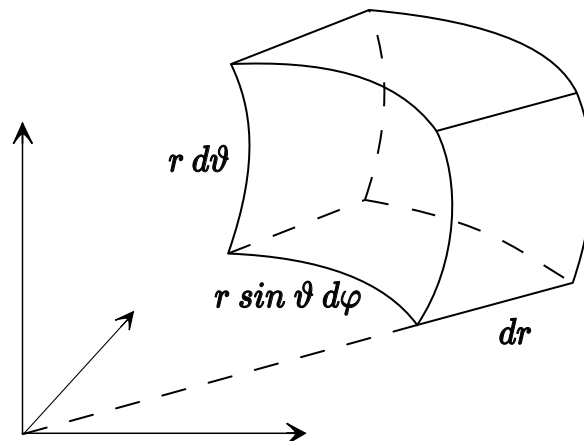


Abbildung 1.46: Volumenelement in Kugelkoordinaten.

Damit ergibt sich für das Kugelvolumen V :

$$V = \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{1}{3} R^3 2 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Die ϑ -Integration kann über mehrere Weisen ausgeführt werden:

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = - \int_1^{-1} d(\cos \vartheta) = \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) = \int_{-1}^1 dx = 2$$

Die x -Integration nach Substitution ist besonders geschickt, wenn der Rest nur von $\cos \vartheta$ abhängt, also wenn z.B. nur Skalarprodukte zwischen Vektoren und der z -Achse vorkommen.

Teile der berechneten Volumina (z.B. Tortenstücke) können jetzt einfach durch entsprechende Einschränkung der Integralgrenzen berechnet werden. Aus den Ergebnissen für die Volumina kann man auch leicht Formeln für Schalen mit kleiner Dicke herleiten, indem man nämlich das innere vom äußeren Volumen abzieht. Im Limes sehr dünner Schalen wird das immer die Fläche mal die Dicke sein, wie man leicht durch Nachrechnen sieht für Zylinder- und Kugelschalen. Die benötigten Flächen kann man ausrechnen, indem man die Radialkomponente festhält und nur über die Winkel integriert. Aus dem Vergleich von Volumina und Flächen sieht man auch, dass diese sich immer durch einen Faktor unterscheiden, der der Raumdimension entspricht.

Differentiale und Differentialoperatoren können in krummlinige Koordinatensysteme umgeschrieben werden.

Differential des Ortsvektors:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^3 b_{y_i} dy_i \hat{\mathbf{e}}_{y_i}$$

$$\text{Polarkoordinaten: } d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } d\mathbf{r} = d\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + r d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + dz \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\text{Kugelkoordinaten: } d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\vartheta \hat{\mathbf{e}}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Wie schreibt sich der Gradient

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

in krummlinig-orthogonalen Koordinaten?

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \sum_{i=1}^3 (\nabla\varphi)_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \\ \Rightarrow (\nabla\varphi)_{y_i} &= \mathbf{e}_{y_i} \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{b_{y_i}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = (\nabla\varphi)_{y_i}} \\ \Rightarrow \nabla &= \boxed{\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i}}\end{aligned}$$

Beispiel

Kugelkoordinaten

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Falls $\varphi = \varphi(r)$ kugelsymmetrisch $\Rightarrow$ Winkelanteile fallen weg

Anwendung

$$\varphi = r \quad \Rightarrow \quad \nabla r = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} r = \hat{\mathbf{e}}_r$$

Zum Vergleich: kartesisch

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_r \quad \checkmark$$

Bisher haben wir ∇ auf skalare Felder angewendet. ∇ kann aber auch auf Vektorfelder angewandt werden.

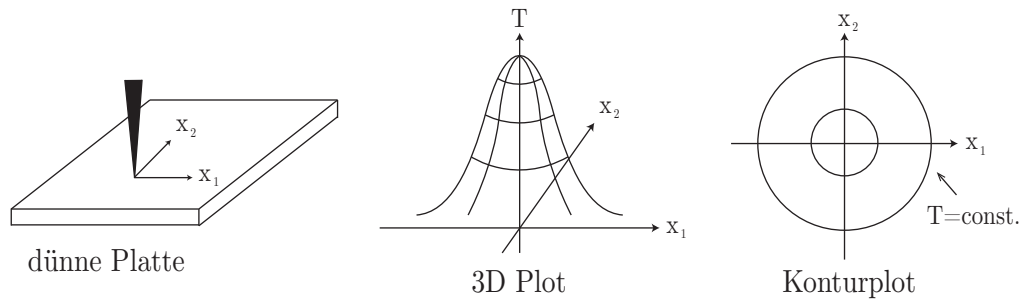


Abbildung 1.47: Skalarfeld am Beispiel Temperatur: eine dünne Platte wird in der Mitte geheizt, das Temperaturfeld ist deshalb zweidimensional und hat eine radialsymmetrische Glockenform. Diese kann entweder durch einen 3D-Plot oder einen Konturplot dargestellt werden.

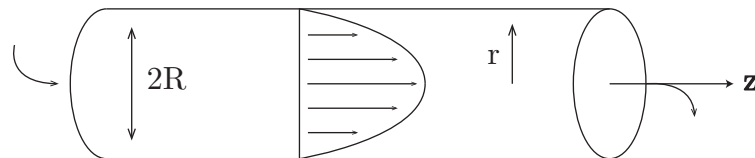


Abbildung 1.48: Vektorfeld am Beispiel Rohrströmung: die parabolische Rohrströmung ist ein einfaches und wichtiges Beispiel für ein Vektorfeld.

Begriffserklärung

Skalarfeld: ein Skalar, der vom Ort abhängt, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ (Beispiel: Temperatur)

Vektorfeld: ein Vektor, der vom Ort abhängt, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$

Ein wichtiges Beispiel dafür ist die Strömung durch ein Rohr, die folgendes Strömungsfeld hat:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z v_0 \left(\frac{R^2 - \rho^2}{R^2} \right) \leftarrow \text{parabolisches Flussprofil}$$

keine φ -Abhängigkeit wegen Zylindersymmetrie, z tritt nur über den Einheitsvektor auf, die einzige wirklich relevante Koordinate ist die Radialkoordinate ρ , mit $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Andere physikalische Beispiele für Vektorfelder

1. Gravitationsfeld $\mathbf{F}_G(\mathbf{r})$
2. elektrisches Feld um eine Ladung $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$

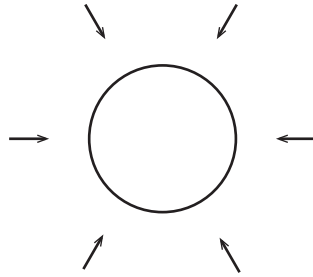


Abbildung 1.49: Gravitationsfeld

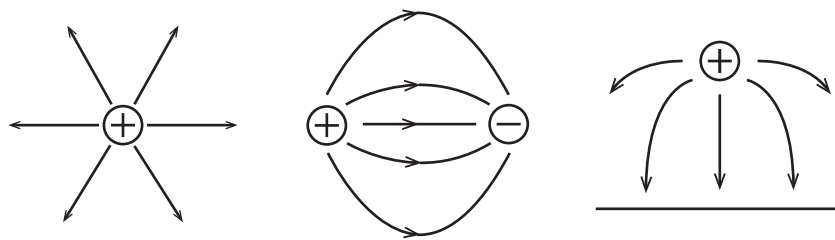


Abbildung 1.50: elektrisches Feld um eine Ladung

3. Strömungsfeld mit Verengung $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

Es gibt zwei fundamental verschiedene Möglichkeiten, den Gradienten auf ein Vektorfeld anzuwenden, die genau Skalar- und Vektorprodukt entsprechen:

Divergenz und Rotation

1. Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

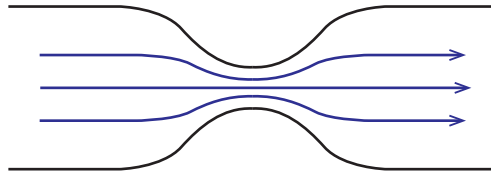


Abbildung 1.51: Strömungsfeld mit Verengung

2. Rotation

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j \right) \hat{\mathbf{e}}_k \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} a_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} a_2 \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} a_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} a_3 \right) \hat{\mathbf{e}}_2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} a_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} a_1 \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \\
 &= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Physikalische Interpretation: Divergenz beschreibt die *Quellen* des Vektorfelds. Rotation beschreibt den Grad der *Verwirbelung*. Für ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{a}$ nennt man

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} && \text{Quellenfeld von } \mathbf{a} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \nabla \times \mathbf{a} && \text{Wirbelfeld von } \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

Besondere Typen von Vektorfeldern sind

Gradientenvektorfeld: $\mathbf{g} = \nabla \varphi$ φ Potential

Wirbelvektorfeld: $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{a}$ $\mathbf{a}$ Vektorpotential

Rechenregeln für die Divergenz

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{a}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{a}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a}$$

Beispiele

1. $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = 0$$

2. $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{r}$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = \alpha \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \right) = 3\alpha$$

3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ Coulomb- oder Gravitationskraft

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\alpha}{r^5} (3r^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

Die Divergenz verschwindet allerdings nicht für $r = 0$, was man mit dem Satz von Gauss zeigen kann. Wir haben also hier einen ganz speziellen Fall, nämlich eine Funktion, die fast überall verschwindet, aber nicht im Ursprung, wo eine Punktquelle sitzt.

4. $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^n}$ Verallgemeinerung der Beispiele 2 und 3 ($n = 0$ bzw. $n = 3$)

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\alpha}{r^n} (3 - n)$$

Der Fall $n = 3$ ist also der einzige, für den die Divergenz in den Ursprung fokussiert wird.

5. Alle diese Beispiele sind kugelsymmetrisch, d.h. eigentlich wäre es angebracht, in Kugelkoordinaten zu rechnen. Verwendung der Divergenz in Kugelkoordinaten ergibt:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \alpha \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{1}{r^{n-1}} \right) = \frac{\alpha}{r^n} (3 - n)$$

Wir bekommen also das gleiche Ergebnis wie in kartesischen Koordinaten.

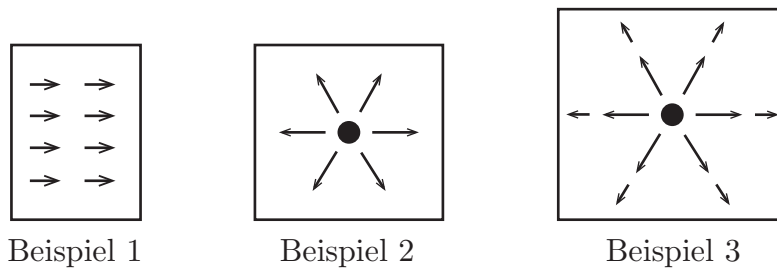


Abbildung 1.52: Veranschaulichung zu den Beispielen

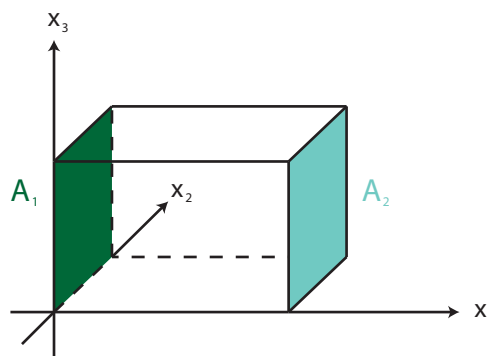


Abbildung 1.53: Durchfluss eines Feldes durch ein Volumen

Physikalische Bedeutung der Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

Durchfluss eines Feldes durch ein Volumen ΔV um den Punkt (x_1, x_2, x_3) :

$$D(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{Fluss}}{\Delta V}$$

Betrachte Flüssigkeit mit Strömungsfeld $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ und Dichte $\rho(x_1, x_2, x_3)$.

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\# \text{ Teilchen} = \rho dV$$

Betrachte x-Richtung: Fluss von links nach rechts.

Reinstrom durch A_1 :

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{dt} = \rho v_{x_1} dx_2 dx_3$$

Rausstrom durch A_2 :

$$\rho(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{dt} \stackrel[\text{Näherung}]{\text{lineare}} \left(\rho(x_1, x_2, x_3) v_{x_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3$$

Bilanz in x-Richtung:

$$\text{Rausstrom} - \text{Reinstrom} = \frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} dV$$

Gesamtbilanz:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_{x_3})}{\partial x_3} \right] dV \Rightarrow \boxed{D = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}$$

Hierbei ist $\rho \mathbf{v}$ die Impulsstromdichte. Allgemein folgt also, dass die Divergenz den Durchfluss eines Vektorfeldes durch den Ort $\mathbf{r}$ beschreibt, wobei im speziellen Fall von Strömungsfeldern die Impulsstromdichte relevant ist.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \text{Quelle}, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} < 0 \quad \text{Senke},$$

Solange es keine Quellen oder Senken gibt, werden die Strömungsfelder divergenzfrei sein.

Höhere Ableitungen

Der Gradient kann auch verwendet werden, um höhere Ableitungen von Skalar- und Vektorfeldern zu definieren, zum Beispiel:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}), \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}), \quad \text{etc.}$$

Besonders wichtig ist die Divergenz eines Gradientenfeldes:

$$\text{div grad } \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) =: \Delta \varphi$$

Δ Laplace-Operator = symmetrische zweite Ableitung in drei Dimensionen

$$\boxed{\Delta \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}}$$

Divergenz in krummlinigen Koordinaten

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i}$$

Sowohl $\mathbf{a}_{y_i}$ als auch $\hat{\mathbf{e}}_{y_i}$ sind Funktionen von y_i .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_{y_j} \hat{\mathbf{e}}_{y_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{b_{y_i}} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j}) \frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{a_{y_j}}{b_{y_i}} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_j}}{\partial y_i}) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt im zweiten Term wird über einen Umweg ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_j \partial y_i} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{y_j} \hat{\mathbf{e}}_{y_j}) &= \frac{\partial}{\partial y_j} (b_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i}) \\ \Rightarrow b_{y_j} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_j}}{\partial y_i} + \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_j} &= b_{y_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_i}}{\partial y_j} + \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \\ \xRightarrow{\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \times} b_{y_j} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_j}}{\partial y_i}) + \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j}) &= b_{y_i} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_i}}{\partial y_j}) + \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_i}) \end{aligned}$$

Der erste Term auf der linken Seite ist gesucht, nach ihm wollen wir auflösen. Das Skalarprodukt im zweiten Term auf der linken Seite gibt ein Kronecker-Delta. Der erste Term auf der rechten Seite fällt weg, da $\hat{\mathbf{e}}_{y_i}$ ein Einheitsvektor ist. Das Skalarprodukt im zweiten Term auf der rechten Seite gibt 1. Damit finden wir:

$$\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_{y_j}}{\partial y_i} = \frac{1}{b_{y_j}} \left(\frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} - \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \delta_{ij} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ \frac{1}{b_{y_j}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Mit diesem Zwischenergebnis gilt also, dass das gesuchte Endergebnis neun verschiedene Terme hat:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{i,j}^{i \neq j} \frac{a_{y_j}}{b_{y_i} b_{y_j}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} b_{y_1} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right] \end{aligned}$$

Die Divergenz in krummlinig-orthogonalen Koordinaten ist also eine komplizierte, aber hochsymmetrische Kombination der Gewichte b_{y_i} und Komponenten a_{y_i} . Interessanterweise taucht hier auch wieder die Jacobi-Determinante $J = b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}$ auf. Die Divergenz ist eine Verallgemeinerung der Ableitung erster Ordnung, d.h. es gibt natürlich Ableitungen erster Ordnung.

Gradient in Divergenz einsetzen:

$$a_{y_i} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_3} b_{y_1}}{b_{y_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) \right]$$

Der Laplace-Operator ist also auch wieder eine hochsymmetrische Kombination von Gewichten und Komponenten, und wieder kommt J vor. Er ist eine Verallgemeinerung der Ableitung zweiter Ordnung, d.h. es muss auch immer zweimal abgeleitet werden.

Beispiele

1. Zylinderkoordinaten

$$b_\rho = 1, \quad b_\varphi = \rho \quad b_z = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta \phi &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Radialanteil nach Produktregel: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2}$$

2. Kugelkoordinaten

$$b_r = 1, \quad b_\vartheta = r \quad b_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$\Rightarrow \Delta \phi = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\text{Radialanteil nach Produktregel: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Anwendung: Laplace in Kugelkoordinaten

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten ist essentiell für die Lösung von Problemen in der Elektrodynamik (insbesondere Streuprobleme in der Optik), für die Lösung des Wasserstoffatoms in der Quantenmechanik sowie für viele weitere Probleme, z.B. in der Kontinuumsmechanik. Hier drei einfache Ergebnisse, die wir jetzt schnell bekommen können:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \phi = r & \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{2}{r} \\
 (2) \quad \phi = \frac{1}{r} & \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = 0 \quad \text{für } r \neq 0 \\
 (3) \quad \phi = \frac{e^{-\alpha r}}{r} & \Rightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{e^{-\alpha r}(-\alpha)r - e^{-\alpha r}}{r^2} \right) \\
 & = -\frac{1}{r^2} (e^{-\alpha r}(-\alpha)(1 + \alpha r) + e^{-\alpha r}(\alpha)) = \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\
 & = \alpha^2 \phi
 \end{aligned}$$

In (2) handelt es sich um das Coulomb- bzw. Gravitationspotential und in (3) um das Yukawa-Potential, das z.B. in der Elektrostatik und in der Kernphysik vorkommt. Mit diesen Rechnungen haben wir auch Lösungen für Differentialgleichungen wie $\Delta\phi = 0$ (für $r \neq 0$) und $\Delta\phi = \alpha^2\phi$ gefunden.

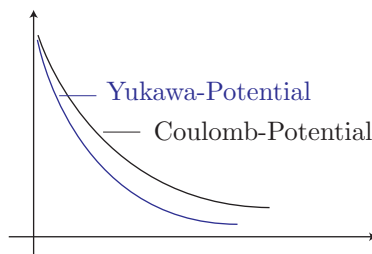


Abbildung 1.54: Yukawa- und Coulombpotential

Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Divergenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_1} b_{y_3} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right]$$

Rotation:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{b_{y_2} b_{y_3}} \left(\frac{\partial(b_{y_3} a_{y_3})}{\partial y_2} - \frac{\partial(b_{y_2} a_{y_2})}{\partial y_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_{y_1} \\ &+ \frac{1}{b_{y_1} b_{y_3}} \left(\frac{\partial(b_{y_1} a_{y_1})}{\partial y_3} - \frac{\partial(b_{y_3} a_{y_3})}{\partial y_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_{y_2} \\ &+ \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2}} \left(\frac{\partial(b_{y_2} a_{y_2})}{\partial y_1} - \frac{\partial(b_{y_1} a_{y_1})}{\partial y_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_{y_3} \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \det \begin{pmatrix} b_{y_1} \hat{\mathbf{e}}_{y_1} & b_{y_2} \hat{\mathbf{e}}_{y_2} & b_{y_3} \hat{\mathbf{e}}_{y_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ b_{y_1} a_{y_1} & b_{y_2} a_{y_2} & b_{y_3} a_{y_3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Laplace:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_3} b_{y_1}}{b_{y_2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) \right]$$

1.8 Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten

Im allgemeinen Fall gilt:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i}$$

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^3 a_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i}$$

Wie rechnen wir v_{y_i} und a_{y_i} aus?

Totales Differential des Ortsvektors

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^3 b_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i} dy_i$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \underbrace{b_{y_i} \hat{\mathbf{e}}_{y_i}}_* \underbrace{\dot{y}_i}_\circ$$

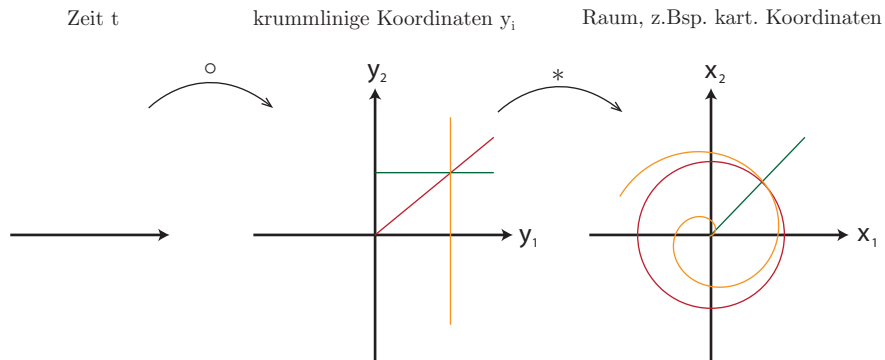


Abbildung 1.55: Wir betrachten jetzt die Verkettung von zwei Abbildungen: von der Zeit geht es über die krummlinigen Koordinaten in den kartesischen Raum.

$$\Rightarrow \boxed{v_{y_i} = b_{y_i} \dot{y}_i}$$

Die a_{y_i} müssen für die gewünschten Koordinatensysteme explizit ausgerechnet werden.

Beispiele

1. Polarkoordinaten

$$b_r = 1, \quad b_\varphi = r$$

$$\Rightarrow v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Außerdem:

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi}$$

Erinnerung: Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}^2 = 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{e}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{e}}} \perp \hat{\mathbf{e}}$

Allgemein:

$$\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j} = \delta_{ij} \Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j} + \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{y_j} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j} = -\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{y_j}$$

$$i = j \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_i} = -\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{y_i} = -\dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_i} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_i} = 0$$

Wir wissen: $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ muss senkrecht auf $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ stehen

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\Rightarrow \alpha = \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_r}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi$$

Mit $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ und $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_r$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \hat{\mathbf{e}}_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \boxed{a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}}$$

Anwendung

a) gleichförmige Kreisbewegung

$$r = R = \text{const.}, \quad \varphi = \omega t, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

$$\Rightarrow v_r = 0, \quad v_\varphi = R\omega, \quad v = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = R\omega$$

$$a_r = -R\omega^2, \quad a_\varphi = 0, \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = R\omega^2 \quad \text{Zentrifugalbeschleunigung}$$

b) nichtgleichförmige Kreisbewegung $r = R = \text{const.}, \quad \ddot{\varphi} \neq 0$

$$\Rightarrow a_\varphi = R\ddot{\varphi} \Rightarrow a = R\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$$\text{Dimensionen: } [a] = \frac{L}{T^2}$$

c) Spiralbewegung $\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}, \quad r = c \cdot t$

$$\Rightarrow v_r = c, \quad v_\varphi = c t \omega$$

$$a_r = -c t \omega^2, \quad a_\varphi = 2c \omega$$

2. Zylinderkoordinaten

$$b_\rho = 1, \quad b_\varphi = \rho, \quad b_z = 1$$

$$\Rightarrow v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

Rechnung zeigt:

$$\dot{\mathbf{e}}_z = 0, \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_r$$

→ wie bei Polarkoordinaten

→ 2D Beschleunigung gleich wie oben, außerdem $a_z = \ddot{z}$

3. Kugelkoordinaten

$$b_r = 1, b_\vartheta = r, b_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$v_r = \dot{r}, v_\vartheta = r \dot{\vartheta}, v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}$$

Ergebnis für die $\dot{\mathbf{e}}_{y_i}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\vartheta \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\vartheta} & \sin \vartheta \dot{\varphi} \\ -\dot{\vartheta} & 0 & \cos \vartheta \dot{\varphi} \\ -\sin \vartheta \dot{\varphi} & -\cos \vartheta \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{pmatrix}$$

Ergebnis für die Beschleunigung:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\vartheta = r \ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \dot{r} \dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}$$

2 Dynamik des Massenpunktes

2.1 Die Newtonsche Gesetze

Die Dynamik befasst sich mit Kräften als Ursache der Bewegung. Die Rolle der Kräfte wird durch die drei Newtonsche Gesetze beschrieben. Formal handelt es sich dabei um ein Axiomensystem, dessen Aussagen innerhalb der Theorie nicht weiter begründet werden (das historische Vorbild von Newton waren die *Elemente* von Euklid). In der Newtonschen Mechanik geht es darum, die Konsequenzen dieser drei Gesetze herzuleiten. Der letzte Massstab ist dabei wie immer in der Physik das Experiment.

1. Lex Prima, Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Bemerkungen: Wichtig ist, dass die Bewegungsänderung, nicht die Bewegung selbst einer Kraft bedarf. Das ist der Unterschied zu Aristoteles, der noch meinte, dass jede Bewegung eine Kraft benötigt. Für Aristoteles war eben die Ruhe der Referenzzustand, und für die Newton ist es die gleichförmige Bewegung. Newton führt hier die richtigen Referenzgrößen ein:

- a) gleichförmige Bewegung für Körper
- b) Inertialsystem für Bezugssystem

Ein auf der Erde ruhendes Labor ist für viele Zwecke ein geeignetes Inertialsystem, ansonsten denken wir an den Fixsternhimmel als geeignetes Inertialsystem.

Ein Zustand gleichförmiger Bewegung ist experimentell schwer zu realisieren.

→ *Dreckeffekte* eliminieren (z.Bsp. Reibung, Scheinkräfte)

→ Es war die historische Leistung von Galileo Galilei, zu zeigen, dass man auf der Erde die Reibungskräfte entfernen muss, um das Trägheitsgesetz experimentell zu beweisen.

→ Es war die historische Leistung von Isaac Newton, zu erkennen, dass auf der Erde und im Weltraum die gleichen Bewegungsgesetze gelten. Im

Weltraum gibt es keine Reibung, da findet man das Trägheitsgesetz also in Reinform.

2. Lex Secunda, Bewegungsgesetz

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in deren Richtung.

Bemerkungen: Die Kraft ist also ein Vektor, er hat Richtung und Betrag.

Änderung der Bewegung = Änderung der Geschwindigkeit = Beschleunigung

$$\Rightarrow \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

m ist die *träge Masse*, eine skalare Eigenschaft des Körpers, die sein Beharrungsvermögen gegenüber Bewegungsänderungen beschreibt.

In manchen Situationen ändert sich die Masse, zum Beispiel

a) Relativitätstheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \begin{cases} m_0 & v \ll c \\ \infty & v \leq c \end{cases}$$

b) Verbrennungsprozesse: Auto, Rakete

Dann benötigen wir eine allgemeinere Formulierung des 2. Gesetzes:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist der *Impuls*. Das 2. Gesetz ist die historische Leistung von Isaac Newton, der dafür sogar die Infinitesimalrechnung erfunden hat (zeitgleich und unabhängig von Gottfried Wilhelm Leibniz). Wenn die Masse bekannt ist, kann man also aus der Beschleunigung (Kinematik) auf die Kräfte schließen (Dynamik). Mathematisch gesehen haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun. Höhere Ableitungen treten in der Klassischen Mechanik glücklicherweise nicht auf. In diesem Gesetz werden Ursache (Kräfte) und Wirkung (Bewegung) getrennt. Das hat Aristoteles auch schon gemacht, aber er hat Kräfte mit Geschwindigkeit in Verbindung gebracht, nicht mit Beschleunigung, weil er im falschen Referenzsystem war (siehe erstes Gesetz). Mit dem 2. Gesetz kann dann aus der Kinematik ($\mathbf{a}$) auf die Dynamik ($\mathbf{F}$) geschlossen werden und umgekehrt.

3. Lex Tertia, Reaktionsgesetz



Abbildung 2.1: Wirkungen zweier Körper aufeinander

Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bemerkungen Die zwei Kraftvektoren sind also anti-parallel zueinander:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \text{actio=reactio}$$

Das 3. Gesetz ist so wichtig, weil die Reziprozität einen Energieaustausch ermöglicht und damit zur Energieerhaltung führt. Das 3. Gesetz erlaubt es uns auch, Massen zu messen:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$$

Als Masseneinheit führen wir das Kilogramm (kg) ein.

$$\rightarrow \text{Krafteinheit } \frac{kg \cdot m}{s^2} = N \quad \text{Newton}$$

Wenn ein $1 \, kg$ Körper in $1 \, s$ gleichmäßig um die Geschwindigkeit $1 \, m/s$ beschleunigt wird, dann wirkt eine konstante Kraft von $1 \, N$.

4. Superpositionsprinzip (4. Gesetz)

Verschiedene Kräfte addieren sich linear:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Dieses Gesetz ist vor allem wichtig, um Mehrteilchensysteme als geschlossene Systeme behandeln zu können. Außerdem sagt es, dass verschiedene Arten von Kräften sich nicht gegenseitig beeinflussen.

Insgesamt hat Newton mit seinen Gesetzen die Physik als Disziplin begründet. Wichtige Elemente waren Abstraktion (Reibungskräfte vernachlässigen, Trägheit als wesentliches Element), Vereinheitlichung (Himmel und Erde haben die gleichen Bewegungsgesetze) und Mathematisierung (ein mathematisches System, mit dem man rechnen kann).

2.2 Grundschemata der Klassischen Mechanik

Kräfte treten idR als Kraftfelder $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ auf. Eine Abhängigkeit von der Beschleunigung oder höheren Ableitungen gibt es idR nicht.

1. Freier Fall

Hierbei handelt es sich um den einfachsten Fall.

$$\mathbf{F}_s = m_s \mathbf{g} = \text{const.} \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{g}=(0,0,-1) \\ g=9,81 \text{ m/s}^2 \text{ Erdbeschleunigung} \\ m_s \text{ schwere Masse} \end{array} \right]$$

Experimentelle Beobachtung: träge = schwere Masse, $m_s = m \Rightarrow$ 2. Gesetz: $m \mathbf{a} = m \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} \Rightarrow$ Alle Körper fallen gleich schnell (in einem Inertialsystem und im Vakuum). Bei Reibung muss typischerweise noch ein Term in der Geschwindigkeit eingefügt werden, der aber nicht von der Masse abhängt (z.B. Stokes-Reibung in einer Flüssigkeit, Reibungskoeffizient geht linear in Ausdehnung, aber nicht mit der Masse). Deshalb werden größere Massen weniger stark von der Reibung abgebremst (z.B. beim Ski- oder Radfahren).

2. Gravitationskraft

Wir verwenden das Zentralfeld aus dem Kinematik-Kapitel

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \hat{\mathbf{e}}_r$$

und für die Abstandsabhängigkeit

$$f(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \quad \left[\gamma = 6,667 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \text{ Gravitationskonstante} \right]$$

Newton hat die $1/r^2$ -Abhängigkeit aus dem 3. Keplerschen Gesetz erschlossen: $r^3 \omega^2 = \text{const}$ für die Planeten auf ihren Umlaufbahnen, also bei der Annahme einer Kreisbewegung $a = r \omega^2 = \text{const}/r^2$. Die kinematische Beschleunigung muss also durch eine entsprechende Zentripetalkraft balanciert werden. Da Massen nur positiv sein können, ist die Gravitation immer anziehend. Dies wird durch das Minuszeichen im Kraftgesetz ausgedrückt.

3. Coulombkraft

Wir haben wieder das gleiche Zentralfeld wie bei der Gravitation, aber die Vorfaktoren sind andere:

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad \left[\begin{array}{l} 4\pi \\ \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \text{ Konvention im SI-System} \\ \text{elektrische Feldkonstante} \end{array} \right]$$

Die Coulombkraft ist anziehend oder abstoßend je nach Vorzeichen der Ladungen. Im Gegensatz zur Gravitationskraft können sich Ladungen gegenseitig ausgleichen.

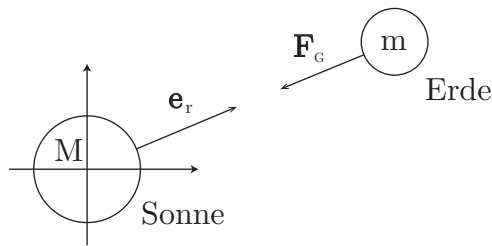


Abbildung 2.2: Veranschaulichung zur Gravitationskraft

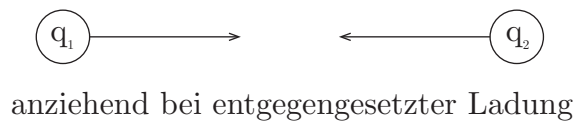


Abbildung 2.3: Veranschaulichung zur Coulombkraft

4. Harmonischer Oszillator

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$$

Es gibt eine lineare Kraft, die das Teilchen immer in den Ursprung zurückzieht, mit der Federkonstante k . In einer Dimension hat man also

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Mit der Definition $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ haben wir

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0$ ist die Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

wie man leicht nachrechnet durch Einsetzen. Der harmonische Oszillator schwingt also mit einer reinen Sinuswelle und mit einer klaren Frequenz. Wenn man Reibung und äußere Anregung dazunimmt, dann hat man

$$m\ddot{x} + \xi\dot{x} + kx = F_{ext}(t)$$

mit dem Reibungskoeffizienten ξ . Diese Fälle werden wir später noch im Detail diskutieren.

5. Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{E} \text{ elektrische Feldstärke} \\ \mathbf{B} \text{ magnetische Induktion} \end{array} \right]$$

Die Lorentzkraft wirkt auf geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern und ist eines der wenigen Beispiele für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft.

Die Kombination der drei Newtonschen Gesetze mit den typischen Kraftfeldern führt zum

Grundschemata der Klassischen Mechanik

Schritt 1: Aufstellen der Bewegungsgleichung

Ziel ist es, die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \ddot{\mathbf{r}}$ aufzustellen. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um ein *drei-dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*:

$$m\ddot{x}_i - F_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3$$

Begriffserklärung Sei $x(t)$ eine Funktion von t . Dann ist die n -te Ableitung $x^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$. Eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung* ist eine Beziehung

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t) = 0$$

Beispiel: $x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$

Abkürzungen Differentialgleichung = Dgl. / DGL / DG
gewöhnliche Dgl. = ODE = ordinary differential equation

Klassifikation

gewöhnlich Es gibt nur eine unabhängige Variable.
partiell Es gibt mehrere unabhängige Variablen.
PDE = partial differential equation = partielle Dgl.
Beispiel für PDE:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3)$$

z.Bsp. $\Delta\phi = 0, \Delta\phi = \alpha^2\phi$

Viele zentrale Gleichungen der Physik sind PDEs: Maxwell-Gleichungen, Schrödinger-Gleichung, Navier-Stokes-Gleichung.

explizit Die Dgl. ist auflösbar nach der höchsten Ableitung:

$$x^{(n)}(t) = g(x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t)$$

linear Ansonsten heißt die Dgl. *implizit*.
 Eine Dgl. ist linear, wenn f linear ist (also z.B. $f(x) = 1 + x$, aber nicht $f(x) = x^2$).
 $\Rightarrow$ Operatorschreibweise

$$L^{(n)}(t)x(t) = h(t), \quad L^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

Beispiel:

$$x^{(5)}(t) + 3x(t) + 3t = 0 \Rightarrow L = \frac{\partial^5}{\partial t^5} + 3, \quad h(t) = -3t$$

Für die Lösung linearer ODEs gibt es viele mächtige Werkzeuge aus der Mathematik.

Gegenbeispiel: $\dot{x}(t)x(t)$ ist ein nicht-linearer Term $\Rightarrow x^{(5)}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) + 3t = 0$ ist eine nicht-lineare Dgl.

Nicht-lineare ODEs sind in der Regel sehr schwer zu lösen, da es dafür keine Systematik gibt.

homogen Keine Terme ohne $x(t)$, also z.B. $h(t) = 0$ im linearen Fall. Andernfalls heißt die Dgl. *inhomogen*.

Schritt 2: Mathematische Lösung

Die mathematische Lösung der Dgl. erfolgt analytisch (mit Methoden wie der Separation der Variablen) oder numerisch (z.Bsp. Euler-oder Runge-Kutta-Verfahren).

Schritt 3: Physikalische Interpretation

Das gewonnene Ergebnis muss physikalisch Sinn machen. Wann immer möglich, sollten Dimensionsbetrachtungen und bekannte Grenzfälle zur Prüfung der Lösung durchgeführt werden.

2.3 Energie- und Drehimpulserhaltung

Im Prinzip könnte man jetzt durch die obigen Beispiele gehen und in jedem Fall mathematisch die entsprechenden Differentialgleichungen lösen. Um aber die physikalische Einsicht zu vertiefen und die Lösungen zu vereinfachen, lohnt es sich, erst einmal nach Erhaltungsgrößen zu suchen. In der fortgeschrittenen theoretischen Physik werden Erhaltungsgrößen und Symmetrien dann das Konstruktionsprinzip für neue Theorien.

Energie in 1D

Sei die Kraft $F = F(x)$ nur vom Raum abhängig.

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F(x) \quad | \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = - \frac{dV(x(t))}{dt} \quad \text{mit } V(x) = - \int_{x_0 \text{ (beliebig)}}^x F(x') dx'$$

Zum Beispiel hätten wir für den harmonischen Oszillator $F = -kx$ und damit $V(x) = kx^2/2$, aber diese Betrachtung ist richtig für alle Kraftgesetze, die nur von x abhängen. Wir betrachten nun die Arbeit, die nötig ist, um einen Massenpunkt um eine Strecke dx gegen eine äußere Kraft zu bewegen:

$$dW = -F dx \quad [W \text{ wegen } work]$$

Die Arbeit definieren wir als positiv, $dW > 0$, falls sie entgegen der Richtung der Kraft wirkt, d.h. falls $\text{sign } F = -\text{sign } dx$. Dann wird an dem Teilchen Arbeit geleistet. Andernfalls ist die Arbeit negativ, $dW < 0$, das Teilchen leistet Arbeit. Die Arbeit, die nötig ist, um das Teilchen auf einem endlichen Wegstück von x_1 nach x_2 zu bewegen, ist

$$W_{21} = - \int_{x_1}^{x_2} F(x') dx' = V(x_2) - V(x_1) \quad [V \text{ Potential oder potentielle Energie}]$$

also genau die Differenz des Potentials. Das Potential beschreibt die potentielle Möglichkeit des Teilchens, Arbeit zu leisten.

Beispiel Schwerfeld

$$\begin{aligned} F_g &= -mg \\ \Rightarrow V(x) &= mgx + C \\ \Rightarrow W_{21} &= V(x_2) - V(x_1) = mg(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Je höher das Teilchen, desto mehr Potential hat es. Ein Plot des Potentials entspricht genau dem Höhenprofil (bis auf eine beliebige additive Konstante).

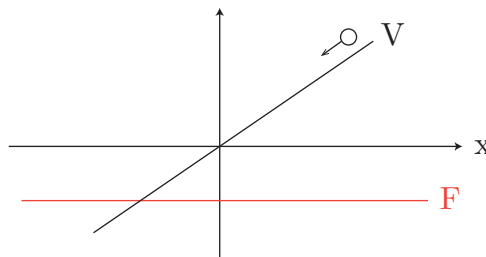


Abbildung 2.4: Schwerfeld: das Potential steigt mit der Höhe, die Kraft ist gerade der negative Gradient.

Eine Integration der Bewegungsgleichung ergibt

$$\underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2}_{=:T} = -V(x) + \underbrace{E}_{\text{Integr.konst.}}$$

$\left[\begin{array}{l} T \text{ kinet. Energie} \\ V \text{ pot. Energie} \\ E \text{ Gesamtenergie} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \boxed{T + V = E} \quad \text{Energieerhaltung (für } F = F(x))$$

Für Kräfte, die nur vom Ort abhängen, ist die mechanische Energie erhalten. Das ist nicht der 1. Hauptsatz der Thermodynamik, der auch nicht-mechanische Energieformen einschließt (Wärme), dann ist die Energie in jedem Fall erhalten. Energie, Arbeit und Potential haben die gleiche Einheit:

$$[E] = Nm = \frac{kg \ m^2}{s^2} = J \quad \text{Joule}$$

Die Energieerhaltung bedeutet eine starke Einschränkung der möglichen Teilchenbewegung, die man ohne Rechnung aus einem Plot des Potentials erschließen kann.

Wegen $T \geq 0$ sind Bereiche mit $V > E$ (klassisch) verboten (in der Quantenmechanik ist das anders). Die Punkte mit $E = V$ sind Umkehrpunkte mit $T = 0$ und deshalb $v = 0$. Die Extrema mit $V'(x) = 0$ sind mögliche Ruhepunkte. In einer Mulde um ein Minimum gibt es bei entsprechender kinetischer Energie *Oszillationen*. Wenn ein Teilchen gegen eine Potentialbarriere anläuft und dann umkehrt, spricht man von *Streuung* (in höheren Dimensionen würde das Teilchen typischerweise zur Seite weggestreut werden).

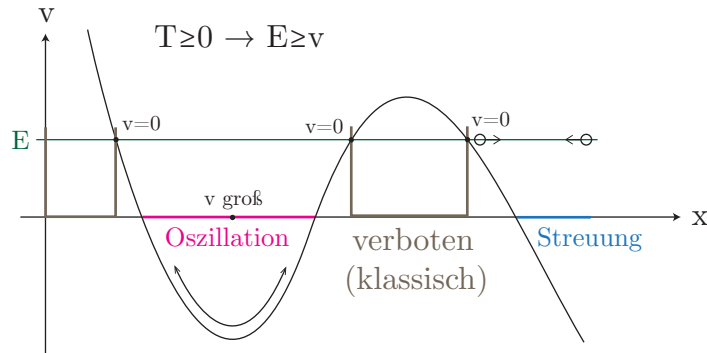


Abbildung 2.5: Aus der Potentiallandschaft kann die Teilchenbewegung qualitativ vorhergesagt werden.

Die Energieerhaltung erlaubt auch eine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Durch Separation der Variablen erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung des Integrals und Umkehrung von $t = t(x)$ nach $x = x(t)$.

Beispiel Harmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

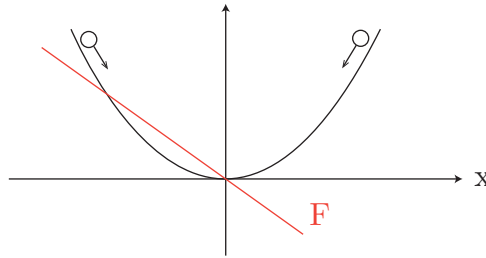


Abbildung 2.6: Harmonischer Oszillator

$$\Rightarrow t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx'^2)}} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{v_0^2 - \omega_0^2 x'^2}} = \int_0^x \frac{dx'}{v_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{v_0^2} x'^2}}$$

Mit der Variablensubstitution $u = \frac{\omega_0}{v_0}x'$, $dx' = \frac{v_0}{\omega_0} du$ ergibt sich:

$$t = \int_0^u \frac{\frac{v_0}{\omega_0} du}{v_0 \sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin u = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 x}{v_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

Das ist genau die Lösung, die wir für den harmonischen Oszillator mit den gegebenen Anfangsbedingungen ($x(0) = 0, v(0) = v_0$) schon berechnet haben.

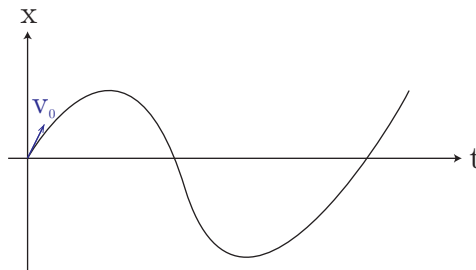


Abbildung 2.7: Bei den verwendeten Anfangsbedingungen für den harmonischen Oszillator ohne Reibung (also mit Energieerhaltung) ergibt sich eine reine Sinusschwingung.

Energie in 3D

Wir betrachten jetzt beliebige Kraftfelder $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Die Arbeit, um einen Massenpunkt von P_1 nach P_2 zu bringen, beträgt:

$$W_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{Linien-, Weg- oder Kurvenintegral}$$

Um dieses Integral auszuwerten, benötigen wir eine parametrisierte Raumkurve $\mathbf{r}(\alpha)$. Dann gilt:

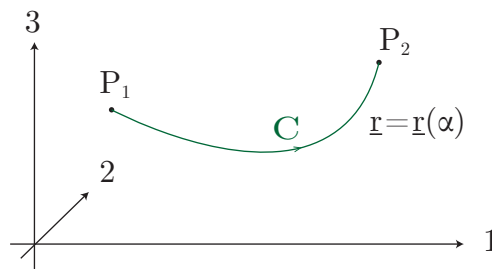


Abbildung 2.8: Der Weg zwischen zwei Punkten wird durch eine parametrisierte Raumkurve beschrieben.

$$W_{21} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\alpha), \dot{\mathbf{r}}(\alpha), t(\alpha)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} d\alpha \quad (\text{z.Bsp. } \alpha = t)$$

Dieses Integral hängt im Allgemeinen ab von:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ Kraftfeld} \\ 2) \text{ Endpunkte } P_1, P_2 \\ 3) \text{ Bewegungszustand} \\ 4) \text{ Weg } C \end{array} \right\} \Rightarrow W_{21} \neq W_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

Beispiel für Wegabhängigkeit

$$C_1 : \mathbf{r}_\alpha = (\alpha, \alpha, \alpha) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$C_2 : \mathbf{r}_\alpha = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2x_1^2 - 3x_2 \\ 4x_2x_3 \\ 3x_1^2x_3 \end{pmatrix}$$

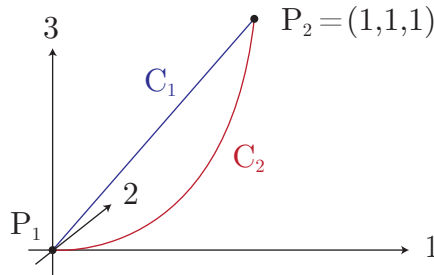


Abbildung 2.9: Unterschiedliche Wege mit unterschiedlichem Arbeitsintegral

$$\begin{aligned}
 W_{C_1} &= - \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha \\ 4\alpha^2 \\ 3\alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\alpha = - \int_0^1 (2\alpha^2 - 3\alpha + 4\alpha^2 + 3\alpha^3) d\alpha \\
 &= - \left[-\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{6}{3}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^4 \right]_0^1 = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$W_{C_2} = - \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 3\alpha^2 \\ 4\alpha^5 \\ 3\alpha^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 3\alpha^2 \end{pmatrix} d\alpha = -\frac{325}{168}$$

$$\Rightarrow W_{C_1} = -\frac{5}{4} \neq -\frac{325}{168} = W_{C_2}$$

$$\Rightarrow \text{in 1D: } dW = -F dx$$

$$\text{in 3D: } \delta W = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{kein totales Differential}$$

Wir betrachten die Bewegungsgleichung in 3D:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad | \quad \dot{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dW}{dt} \quad \text{mit } W = - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \dot{\mathbf{r}}(t'), t') \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') dt'$$

Formal sieht das aus wie in 1D, aber das Arbeitsintegral kann jetzt vom Weg abhängen. Nur für eine bestimmte Unterklasse von Kraftfeldern gibt es keine Wegabhängigkeit. Dies sind die *konservativen* Kräfte, für die es ein skalares Feld $V(\mathbf{r})$ gibt, so dass:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}\right) = -\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow W_{21} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)$$

Die Arbeit hängt somit nur von den Endpunkten des Weges ab, sie ist also wegunabhängig.

$$\Rightarrow \dot{T}(\dot{\mathbf{r}}) + \dot{V}(\mathbf{r}) = 0 \quad T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T + V = E = \text{const.}}$$

Für konservative Kräfte gilt also wieder die Energieerhaltung. Kräfte sind entweder *konservativ* ($\dot{E} = 0$) oder *dissipativ* ($\dot{E} \neq 0$), d.h.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{kons}} + \mathbf{F}_{\text{diss}}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Konservative Kräfte $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ dürfen nicht von $\dot{\mathbf{r}}$ oder t abhängen. Deshalb sind Reibungskräfte oder explizit zeitabhängige äußere Kräfte dissipativ. Es stellt sich nun die Frage, wie man konservative Kräfte erkennt. Dafür gibt es verschiedene Kriterien, die nun im Folgenden aufgelistet werden. Es ist zu beachten, dass alle Kriterien äquivalent zueinander sind.

Konservative Kräfte

- 1) $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$
- 2) $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dV(\mathbf{r}(t))}{dt}$
- 3) $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = -(\nabla \times \nabla V) = \mathbf{0}$
- 4) Wegunabhängigkeit

Wegen

$$0 = \oint_C dV = \oint_C \nabla V \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \underbrace{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Arbeit}}$$

leistet ein konservatives Feld auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit.

$$\Rightarrow 0 = -\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

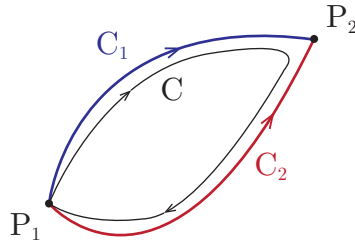


Abbildung 2.10: Der geschlossener Weg C kann in zwei Teilstrecken zerlegt werden.

$$\Rightarrow - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

D.h. die Arbeit von P_1 nach P_2 ist wegunabhängig.

Beispiele für konservative Kräfte

1. Homogenes Kraftfeld (z.Bsp. Schwerfeld)

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{r}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$$

Speziell beim Schwerfeld ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G = \mathbf{A} = m\mathbf{g} &= m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \\ \Rightarrow V(\mathbf{r}) &= -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = mgx_3 \end{aligned}$$

2. radialsymmetrisches Zentralfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \\ V(r) &= - \int_{r_0}^r f(r') dr' \end{aligned}$$

Diese Stammfunktion in 1D existiert immer.

$$\Rightarrow F = -\nabla V(r) = - \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{-f(r)} \underbrace{\nabla r}_{\hat{\mathbf{e}}_r} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \quad \checkmark$$

Dieses Kraftfeld ist immer konservativ, da $V(r)$ immer existiert.

Wichtige physikalische Fälle sind:

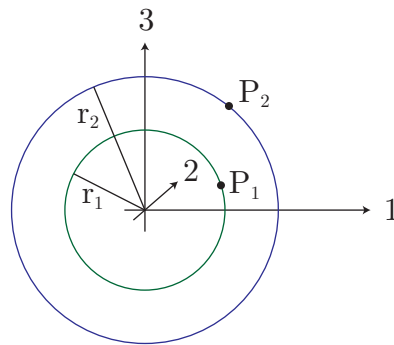


Abbildung 2.11: Ein radialsymmetrisches Potential hängt nur vom Radiusbetrag ab, ist also konstant auf Kugelschalen.

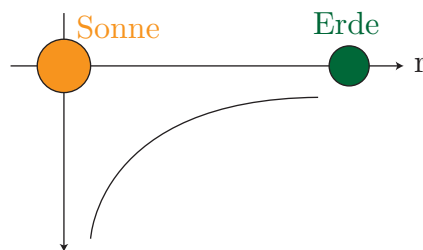


Abbildung 2.12: Die Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde ist konservativ.

- a) Gravitations- bzw Coulombkraft: $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$
- b) Harmonische Kraft: $V(r) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2$

Drehimpuls in 3D

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad | \quad \mathbf{r} \times .$$

$$\Rightarrow m(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Links steht wieder eine Zeitableitung.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_0 + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ Impuls, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ Drehimpuls, $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ Drehmoment

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

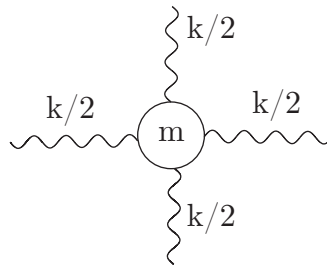


Abbildung 2.13: Die harmonische Kraft in einem Federsystem ist konservativ.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{Drehimpulserhaltung für } \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

Dies kann in zwei Fällen vorliegen:

- 1) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (trivial)
- 2) $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ (Zentralfeld)

Somit gilt für **radialsymmetrische Zentralfelder** sowohl **Energie-** als auch **Drehimpulserhaltung**.

2.4 Die drei Kepler'schen Gesetze

Die drei folgenden Gesetze sind nach dem Astronomen JOHANNES KEPLER (1571-1630) benannt und waren einer der Ausgangspunkte für Newtons Entdeckung des Gravitationsgesetzes:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Wie wir unten sehen werden, sind diese drei Gesetze eine Konsequenz von Energie- und Drehimpulserhaltung, die für die Gravitationskraft gilt. Die Gravitationskraft zweier Massen berechnet sich nach Newton durch:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{m_1 m_2 \gamma}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

m_1, m_2
 γ
 r

Massen

Gravitationskonstante

Abstand der Massen

Dieses Kraftfeld besitzt ein Potential:

$$\mathbf{F}_G = -\nabla V(r) \text{ mit } V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

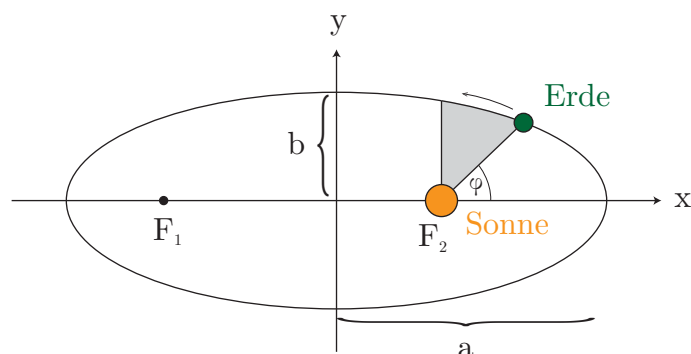


Abbildung 2.14: Die Bahnparameter

Es handelt sich also um ein konservatives System, deshalb gilt Energieerhaltung, $T + V = E = \text{const.}$ Da die Gravitationskraft außerdem eine Zentralkraft ist, gilt mit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ auch Drehimpulserhaltung, $\mathbf{L} = \text{const.}$ Eine unmittelbare Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist es, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für eine Ebene. Da $\mathbf{L}$ konstant ist, ändert sich diese Ebene nicht.

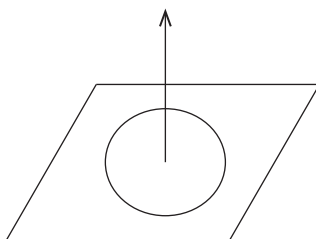


Abbildung 2.15: Bewegungsebene

2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)

Für die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche gilt:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)| = |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)| dt \end{aligned}$$

Damit folgt:

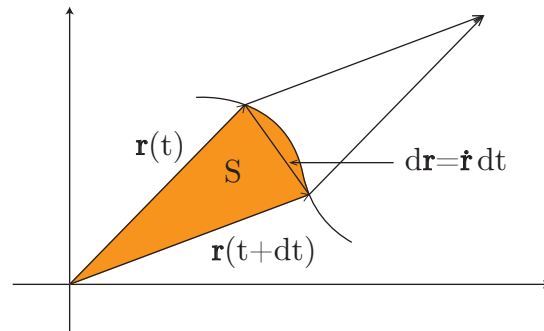


Abbildung 2.16: Flächensatz

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| \quad \checkmark$$

1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz)

Wir betrachten jetzt die Bewegungsgleichung in der Ebene. Dazu bieten sich Polarkoordinaten an:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

Damit folgt für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m (r \hat{\mathbf{e}}_r \times r \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \\ &= m r^2 \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2}$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich für die Energie:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \\ \text{mit } V_{\text{eff}}(r) &= V(r) + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

Damit haben wir effektiv ein 1D-Problem erhalten, die Winkelanteile sind auf-

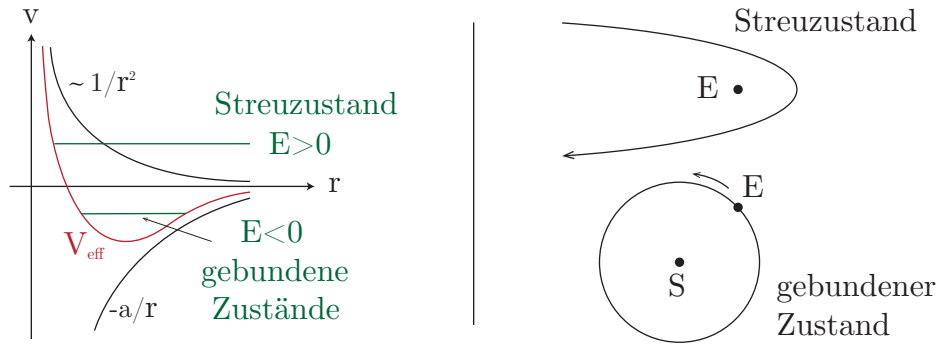


Abbildung 2.17: Zustandstypen

grund der Drehimpulserhaltung eliminiert. Der dadurch entstehende Term heißt *Zentrifugalbarriere*, da er das Teilchen vom Ursprung fern hält. Die Lösung erfolgt formal wie beim Vorgehen im 1D-Fall:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} = \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \Rightarrow r = r(t) \text{ nach Umkehrung}$$

Für $\varphi = \varphi(t)$ gibt es eine analoge Formel. Allerdings sind dies aufgrund der Form von $V_{\text{eff}}(r)$ sehr komplizierte Integrale.

Deshalb ist die Lösung einfacher mit folgendem Vorgehen:

- Betrachte $r = r(\varphi)$ statt $r = r(t)$. Damit wird der Fokus weniger auf die Dynamik als vielmehr auf die Geometrie der Bahnkurve gelegt.
- Betrachte $s = \frac{1}{r} = s(\varphi)$. Das effektive Potential wird dann ein Polynom von s .

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L} = -\dot{r} \frac{m}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s$$

Hier bedienen wir uns eines kleinen Tricks: Wir differenzieren obige Gleichung auf beiden Seiten nach φ :

$$\Rightarrow 0 = \frac{L^2}{2m} \left[2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = \frac{\alpha m}{L^2} =: \frac{1}{k}}$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit konstanter äußerer Kraft. Die allgemeine Lösung lautet (mehr dazu später im Einschub über Differentialgleichungen):

$$s(\varphi) = \underbrace{A \sin \varphi + B \cos \varphi}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{spez. Lsg. der inhom. Dgl.}}$$

Die Konstanten A und B folgen aus den Anfangsbedingungen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der sonnennächste Punkt (r minimal, s maximal) bei $\varphi = 0$ liegt.

$$\Rightarrow \left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 = A$$

Mit $\varepsilon := kB$ ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

Im folgenden werden wir zeigen, dass dies für $0 < \varepsilon < 1$ die Bestimmungsgleichung

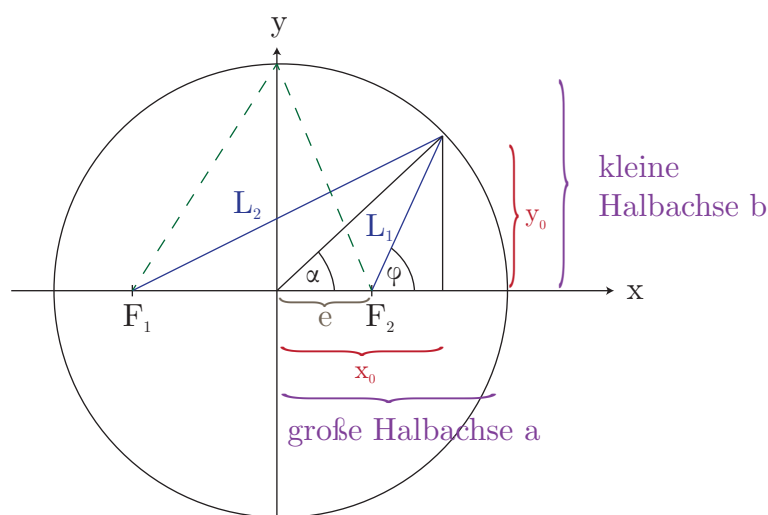


Abbildung 2.18: Ellipsenparameter

für eine Ellipse ist.

Eine Ellipse ist dadurch charakterisiert, dass für ihre Punkte die Summe der Abstände zweier Brennpunkte konstant ist. Am sonnennächsten Punkt findet man

$$L_1 + L_2 = 2a$$

Am obersten Punkt findet man

$$a^2 = e^2 + b^2$$

Kartesische Koordinaten: Wechsel vom Brenn- zum Mittelpunkt

$$y^2 + (x - e)^2 = L_1^2$$

$$y^2 + (x + e)^2 = L_2^2$$

Aus diesen zwei Gleichungen wollen wir nun eine Beschreibung der Ellipse mittels kartesischer Koordinaten herleiten.

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$L_2^2 - L_1^2 = 4ex = \underbrace{(L_2 + L_1)}_{2a}(L_2 - L_1) \Rightarrow L_2 - L_1 = \frac{2ex}{a}$$

Quadratur beider Seiten liefert:

$$L_2^2 + L_1^2 - 2L_2L_1 = \frac{4e^2x^2}{a^2} \quad (1)$$

Ferner gilt wegen $L_1 + L_2 = 2a$:

$$(L_1 + L_2)^2 = 4a^2 \Rightarrow L_2^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 = 4a^2 \quad (2)$$

Addition der Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$\frac{4e^2x^2}{a^2} + 4a^2 = 2(L_1^2 + L_2^2) = 2(2y^2 + 2x^2 + 2e^2)$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

Unter Verwendung von $b^2 = a^2 - e^2$ erhält man die gesuchte *Mittelpunktsleichung*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Damit ist auch klar, dass die Polarkoordinaten vom Mittelpunkt aus folgendermaßen lauten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ b \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \checkmark$$

Für unsere Rechnung benötigen wir aber die Polarkoordinaten vom Brennpunkt aus: $r = r(\varphi)$ wobei $r = L_1$.

$$L_2^2 - L_1^2 = 4ex = 2a(L_2 - L_1)$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2 - \frac{2ex}{a} = (2a - L_1) - \frac{2ex}{a}$$

$$\Rightarrow L_1 = a - \frac{e}{a}x = a - \frac{e}{a}(e + L_1 \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow L_1(1 + \frac{e}{a} \cos \varphi) = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

Wir definieren:

$$\varepsilon := \frac{e}{a} \quad \text{Exzentrizität} \qquad k := \frac{b^2}{a}$$

Für die Exzentrizität gilt $0 < \varepsilon < 1$ (bei $\varepsilon \rightarrow 0$ nähert sich die Ellipse einem Kreis an und bei $\varepsilon \rightarrow 1$ einer unendlich langen Zigarre). Mit $r = L_1$ erhalten wir nun die gesuchte Ellipsengleichung:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi)} \quad \checkmark$$

Tatsächlich handelt es sich dabei um die allgemeine Gleichung für Kegelschnitte. Im Falle $\varepsilon > 1$ ergeben sich Hyperbeln und Parabeln, also die Streuzustände des Gravitationspotentials.

Die geometrischen Größen können nun mit den physikalischen Größen in Bezug gesetzt werden:

$$k = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\alpha m}$$

Energie am sonnennächsten Punkt: $r(\varphi = 0) = r_0 = a - e$.

$$\begin{aligned} E(\varphi = 0) &= \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{\alpha}{r_0} = \alpha \left(\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{(a^2 - e^2)}{2a(a - e)^2} - \frac{1}{(a - e)} \right) = -\frac{\alpha}{2a} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \sqrt{\frac{L^2 a}{\alpha m}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}}$$

Die große Halbachse a folgt also aus der mechanischen Gesamtenergie E . Da wir gebundene Zustände (Ellipsen) betrachten, gilt $E < 0$. Die kleine Halbachse b folgt dann mit dem Drehimpuls L .

3. Kepler'sches Gesetz

Dieses Gesetz folgt aus den ersten beiden. Wir werden das 2. Kepler'sche Gesetz auf die in einem Umlauf überstrichene Fläche S an:

$$S = \pi ab = T \frac{L}{2m}$$

wobei πab die Ellipsenfläche und T die Umlaufzeit ist.

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4m^2}{L^2 a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{m_s \gamma} = \text{const.} \quad \checkmark$$

Mit der Sonnenmasse m_s und der Gravitationskonstante γ ist diese Konstante für alle Planeten gleich.

Formeln zu den drei Kepler'schen Gesetzen

1. Kepler'sches Gesetz (Ellipsensatz):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi) \\ \varepsilon &= \frac{e}{a}, \quad k = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\alpha m} \\ a &= -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \sqrt{\frac{L^2 a}{\alpha m}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}} \end{aligned}$$

(Für die Definition von a, b und e siehe Abb. 2.18)

2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| = \text{const.}$$

3. Kepler'sches Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} = \text{const.}$$

2.5 Annahme von Punktteilchen

Bisher haben wir nur die Wechselwirkung zwischen punktförmigen Massen betrachtet. Warum ist dies für ausgedehnte Körper wie Planeten überhaupt gerechtfertigt?

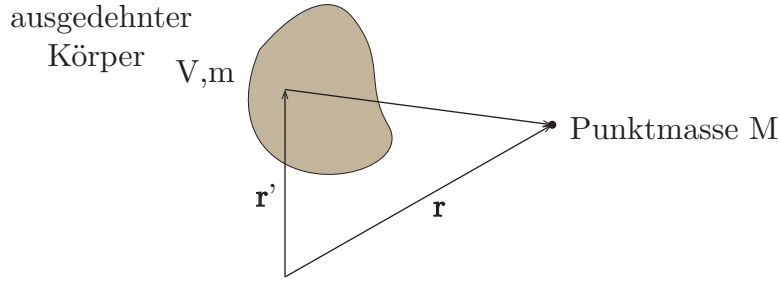


Abbildung 2.19: Gravitative Wechselwirkung zwischen einem ausgedehnten Körper und einer Punktmasse.

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Gravitationskraft, die ein ausgedehnter Körper auf eine Punktmasse mit Masse M an der Position $\mathbf{r}$ ausübt. Wegen dem Superpositionsprinzip folgt diese als ein Volumenintegral über die Massenverteilung mit Dichte $\rho(\mathbf{r}')$ im ausgedehnten Körper:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int d^3r' (-\gamma M \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3})$$

Diese Kraft besitzt das Potential

$$V(\mathbf{r}) = \int d^3r' (-\gamma M \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}), \quad \nabla V = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$$

da Integral und Ableitung hier vertauschen. Man betrachte die Divergenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\Delta V(\mathbf{r}) \stackrel{\text{ohne Beweis}}{=} -4\pi\gamma M \rho(\mathbf{r})$$

Der *Gauß'sche Satz* (benannt nach CARL FRIEDRICH GAUSS) besagt:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \mathbf{F} \cdot dV$$

Der Gauß'sche Satz erlaubt es uns also, ein Volumenintegral in ein Flächenintegral umzuwandeln. Das ist ähnlich wie beim Stokes'schen Satz, der ein Flächenintegral in ein Linienintegral umwandelt. Wir betrachten jetzt eine Kugel mit konstanter Dichte ρ_0 . Dann muss das Kraftfeld rotationssymmetrisch sein, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$. Die skalare Kraft $f(r)$ kann mit dem Gauß'schen Satz berechnet werden. Wir betrachten erst den Fall, dass der Massenpunkt außerhalb der Kugel liegt, $r > R$:

$$\int \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int f(r)\hat{\mathbf{e}}_r r^2 d\Omega = 4\pi r^2 f(r) = \int \nabla \mathbf{F} dV = -4\pi\gamma M \underbrace{\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3}_m$$

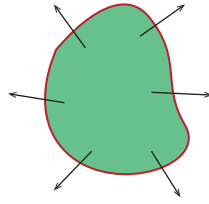


Abbildung 2.20: Nach Gauß kann das Flächenintegral über das Vektorfeld an der Oberfläche in ein Volumenintegral über den Körper umgewandelt werden.

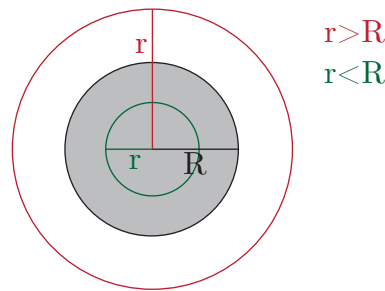


Abbildung 2.21: Geometrie für die Berechnung der Kraft: wir betrachten sowohl Massenpunkte außerhalb als auch innerhalb der Kugel mit konstanter Dichte und Radius R .

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = -\gamma M m \frac{1}{r^2}}$$

Die ausintegrierte Wechselwirkung ist also genau die, die auch zwischen zwei Punktteilchen herrscht. Das berechtigt zur Annahme, in der Planetenbewegung Punktteilchen anzunehmen.

Im Falle $r < R$ ist die Rechnung ganz ähnlich:

$$4\pi r^2 f(r) = -4\pi\gamma M \rho_0 \underbrace{\frac{4\pi}{3} r^3}_{m \frac{r^3}{R^3}} \frac{R^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = -\gamma M m \frac{r}{R^3}}$$

Das wäre also zum Beispiel die Kraft, die ein Teilchen erfährt, das in einem Schacht in die Erde eingeführt wird. Die Wechselwirkung genau in der Mitte ($r = 0$) verschwindet, wie es aus Symmetriegründen auch sein muss. Sie steigt dann linear mit r an, bis der Radius R erreicht ist (also für die Erde die Erdoberfläche). Dann fällt sie mit $f(r) \sim -1/r^2$ wie für ein Punktteilchen ab.

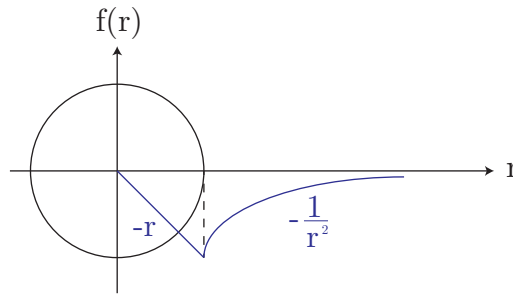


Abbildung 2.22: Die Wechselwirkung zwischen einem Punktteilchen und einer Kugel konstanter Dichte ist innerhalb der Kugel linear mit dem Abstand und geht dann in die Wechselwirkung zwischen zwei Punktteilchen über.

Beispiel Fall durch die Erde

Im Film *Total Recall* bauen die Menschen einen Schacht durch den Erdkern, um in einem Aufzug schnell auf die andere Seite zu gelangen, genauer von England nach Australien. Diese Idee ist genial, weil man dafür keine Energie benötigen würde, aber auch total unrealistisch, weil man nicht durch den Erdkern bohren kann. Solch eine Durchquerung dauert im Film 15 Minuten. Ist dies realistisch? Einsetzen der Kraft im Inneren der Erde in das zweite Newtonsche Gesetz ergibt:

$$m\ddot{r} = -\gamma m M \frac{r}{R^3}$$

Nach kürzen der Masse m ergibt der Vergleich mit der Form des harmonischen Oszillators

$$m\ddot{r} + \omega^2 r = 0$$

die Schwingungsfrequenz für diesen Fall:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}$$

Ein Fall auf die andere Seite entspricht genau einer halben Kosinus-Schwingung, man beginnt mit verschwindender Geschwindigkeit und kommt am Schluss auch wieder genau zum Stehen. Einsetzen liefert mit $T_{\text{Fall}} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega}$ eine Fallzeit von ca. 40 Minuten. Der Film hat also die Fallzeit zu positiv dargestellt, aber die Größenordnung stimmt.

3 Dynamik in einer Dimension

3.1 Fallgesetze

Freier Fall

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -g}$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Dgl. 2. Ordnung. Die Lösung dieser Dgl. ist einfach, aber es ist wichtig, die Konzepte dahinter im Detail zu verstehen. Wir beginnen mit einer *Verdoppelung der Variablen*, d.h. statt x betrachten wir x und $v = \dot{x}$. Dann haben wir zwei Differentialgleichungen:

$$\boxed{\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -g}$$

Die Differentialgleichung 2. Ordnung für x wurde also durch Verdoppelung der Variablen $x \rightarrow (x, v)$ in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt. In Matrixschreibweise kann es auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{homogen}} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}_{\text{inhomogen}}$$

Wir lösen erst die Gleichung für v :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \quad \xrightarrow[\text{Variablen}]{\text{Separation der}} dv = -g dt \Rightarrow \int dv = -g \int dt + C_1 \\ &\Rightarrow \boxed{v = -gt + C_1} \end{aligned}$$

Damit lösen wir die Gleichung für x :

$$\dot{x} = v = -gt + C_1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Definiert man nun $v(0) =: v_0 \Rightarrow C_1 = v_0$, $x(0) =: x_0 \Rightarrow C_2 = x_0$, so folgt:

$$\boxed{x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Dieses Ergebnis ist die Wurfparabel ohne Horizontalgeschwindigkeit, die wir schon in der Kinematik hergeleitet hatten.

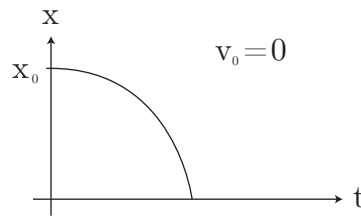


Abbildung 3.1: Freier Fall mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit

Fall mit Stokes'scher Reibung

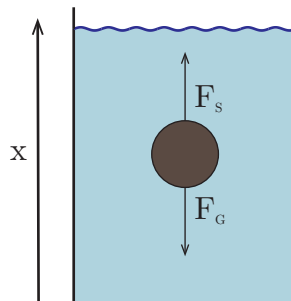


Abbildung 3.2: Kräfte auf fallende Kugel in Flüssigkeit

Die Stokes-Kraft F_s ist die Reibungskraft, die eine Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, die sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt. Sie wird in der Hydrodynamik aus der Stokes-Gleichung (Navier-Stokes-Gleichung bei kleiner Reynoldszahl, also bei hoher Viskosität der Flüssigkeit) berechnet:

$$F_s = 6\pi\eta Rv \Rightarrow F_s = \xi v, \xi = 6\pi\eta R$$

$$\begin{bmatrix} \eta & \text{Viskosität} \\ R & \text{Kugelradius} \\ v & \text{Geschwindigkeit} \\ \xi & \text{Reibungskoeffizient} \end{bmatrix}$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -mg - \xi\dot{x} \Rightarrow m\dot{v} = -mg - \xi v$$

Wir haben also wieder eine inhomogene lineare ODE 1. Ordnung für v . Wir fangen mit dem homogenen Fall an:

$$\dot{v} = -\frac{\xi}{m}v$$

Das ist die Dgl. für den radioaktiven Zerfall: die differentielle Änderung ist proportional zur Zahl der Kerne:

$$\dot{N} = -\lambda N \quad \left[\begin{array}{l} N \text{ \#Kerne} \\ \lambda \text{ Zerfallskonstante, } [\lambda] = \frac{1}{T} \end{array} \right]$$

Separation der Variablen:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Wegen $\frac{dN}{N} = d \ln(N)$ ergibt sich:

$$\int d(\ln(N)) = -\lambda \int dt + C_0 \Rightarrow \ln(N) = -\lambda t + C_0$$

Anwenden der Exponentialfunktion auf beide Seiten liefert:

$$e^{\ln(N)} = N = e^{-\lambda t + C_0} = e^{-\lambda t} C_1 \quad \text{wobei } C_1 := e^{C_0}$$

Mit $N_0 = N(t=0)$ und somit $C_1 = N_0$ folgt:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}} \quad \text{exponentieller Zerfall}$$

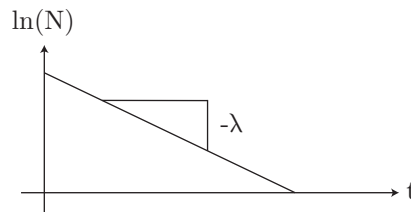


Abbildung 3.3: Radioaktiver Zerfall: die Zahl der Kerne zerfällt exponentiell.

Der komplementäre Fall ist das Populationswachstum: $\dot{N} = r N$ mit r Wachstumsrate

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{rt}} \quad \text{exp. Wachstum}$$

Zurück zur Lösung des homogenen Falls für den Fall mit Reibung: aus der Separation der Variablen ergab sich:

$$\dot{v} = -\frac{\xi}{m} v \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{\xi}{m} t}$$

d.h. die Geschwindigkeit zerfällt exponentiell. Weiter zum inhomogenen Fall: Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
 dv &= -g\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right)dt \Rightarrow \frac{dv}{(1 + \xi v/mg)} = -g dt \\
 &\Rightarrow \int \frac{dv}{(1 + \xi v/mg)} = \int -g dt + C_1 \\
 &\Rightarrow \frac{mg}{\xi} \ln\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right) = -gt + C_1 \\
 &\Rightarrow v = \frac{mg}{\xi} \left[e^{\xi(C_1 - gt)/mg} - 1 \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v = \frac{-mg}{\xi} = -v_\infty \quad \text{mit} \quad v_\infty = \frac{mg}{\xi} > 0
 \end{aligned}$$

Dieses asymptotische Ergebnis kann auch direkt aus der Differentialgleichung gewonnen werden: Steady State Bedingung $\dot{v} = 0 \Rightarrow v = -\frac{mg}{\xi} \checkmark$

$$\begin{aligned}
 t_0 = 0 &\Rightarrow v_0 = v_\infty [e^{C_1/v_\infty} - 1] \\
 &\Rightarrow \left(\frac{v_0}{v_\infty} + 1\right) = e^{C_1/v_\infty} \\
 &\Rightarrow v = v_\infty \left[\left(\frac{v_0}{v_\infty} + 1\right) e^{-gt/v_\infty} - 1 \right] = (v_0 + v_\infty) e^{-gt/v_\infty} - v_\infty
 \end{aligned}$$

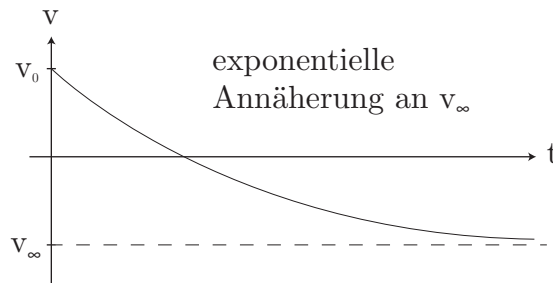


Abbildung 3.4: Beim Fall mit Stokes'scher Reibung zerfällt die Anfangsgeschwindigkeit exponentiell auf den asymptotischen Wert.

Lösung für die Position: $\dot{x} = v = (v_0 + v_\infty)e^{-gt/v_\infty} - v_\infty$

$$\Rightarrow x(t) = -(v_0 + v_\infty) \frac{v_\infty}{g} e^{-gt/v_\infty} - v_\infty t + C_2$$

Im Falle $t = 0$:

$$\Rightarrow x_0 = -(v_0 + v_\infty) \frac{v_\infty}{g} + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 - v_\infty t + (v_0 + v_\infty) \frac{v_\infty}{g} (1 - e^{-gt/v_\infty})}$$

Für kurze Zeiten haben wir wieder das Ergebnis der Wurfparabel (beschleunigte Bewegung), für lange Zeiten gewinnt aber die Reibung und die Bewegung erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit. Man überprüft leicht, dass alle physikalischen Dimensionen Sinn machen.

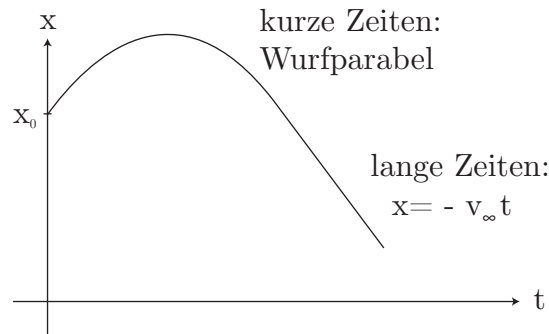


Abbildung 3.5: Beim Fall mit Stokes'scher Reibung geht die beschleunigte Bewegung für lange Zeiten in einen Fall mit konstanter Geschwindigkeit über.

Limes freier Fall ? $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow v_\infty = \frac{mg}{\xi} \rightarrow \infty$

Mit $u = \frac{gt}{v_\infty} \ll 1$ bei fester Zeit t gilt:

$$e^{-gt/v_\infty} = e^{-u} \approx 1 - u + \frac{u^2}{2} \quad \text{quadr. Näherung aus Taylorreihe für } e^{-u}$$

Quadratische Näherung in allgemeine Lösung eingesetzt:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - v_\infty t + (v_0 + v_\infty) \frac{v_\infty}{g} \left(\frac{gt}{v_\infty} - \frac{1}{2} \left(\frac{gt}{v_\infty} \right)^2 \right) \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \checkmark \quad \text{freier Fall} \end{aligned}$$

wobei sich der lineare Term $-v_\infty t$ wegekürzt und beim quadratischen Term v_0 gegenüber v_∞ vernachlässigt werden kann.

3.2 Mathematischer Einschub 5: Lineare ODEs

Allgemeine Lösung homogener Dgl.

Wir betrachten zunächst den homogenen Fall für eine lineare ODE n-ter Ordnung:

$$L^{(n)}(t)x(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0$$

Die allgemeine Lösung ist eine Lösungsschar $x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, die von den n Integrationskonstanten γ_i abhängt. Typischerweise werden diese durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Satz von Picard-Lindelöf: die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x)$ existiert und ist eindeutig, wenn $f(t, x)$ Lipschitz-stetig ist in x (es existiert eine Zahl L , sodass $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2|$).

Die Einschränkung auf die erste Ordnung ist kein Problem, da wir Differentialgleichungen höherer Ordnung immer zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben können. Dieser Satz sagt im wesentlichen aus, dass in der Kurvenschar der Möglichkeiten alle Punkte abgedeckt sind und es keine Kreuzungen gibt (denn die Eindeutigkeit wäre sonst verletzt).

Superpositionsprinzip: Mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist auch $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ Lösung.

Beweis: Folgt aus der Linearität des Differentialoperators:

$$L^{(n)}(c_1x_1 + c_2x_2) = \underbrace{c_1L^{(n)}x_1}_0 + \underbrace{c_2L^{(n)}x_2}_0 = 0 \quad q.e.d.$$

Das Superpositionsprinzip legt nahe, dass die allgemeine Lösung in *Grundlösungen* zerlegt werden kann. Wir suchen also eine *Basis* für den Lösungsraum. Wie bei Vektoren definieren wir (mathematisch kann man mit Funktionen auch einen Vektorraum definieren): die m Lösungen $x_1(t), \dots, x_m(t)$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t) = 0$$

nur für $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$. Ein praktisches Kriterium, um das zu prüfen, ist das Berechnen der Wronski-Determinante. Wenn diese nirgends verschwindet, dann sind die Funktionen linear unabhängig.

Satz Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung lässt sich als Linearkombination von genau n linear unabhängigen Lösungsvektoren schreiben (*Fundamentalsystem*).

Beweis: Sei m die maximale Zahl der linear unabhängigen Lösungsvektoren. Dann ist die allgemeine Lösung

$$x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t)$$

Andernfalls wäre m nicht maximal.

Noch zu zeigen: $m = n$

$m < n \Rightarrow x$ wäre nicht die allgemeine Lösung $\nmid$

$m > n \Rightarrow x$ würde von mehr als n Parametern abhängen $\nmid$

$\Rightarrow m = n$

q.e.d.

Allgemeine Lösung inhomogener Dgl.

Jetzt zum inhomogenen Fall:

$$L^{(n)}(t)x(t) = h(t)$$

z.Bsp. $h = -mg$ für Fallgesetz.

Satz: Sei $x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $L^{(n)}(t)x(t) = 0$ und sei $x_0(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, also $L^{(n)}(t)x_0(t) = h(t)$. Dann ist $\bar{x}(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) = x(t|\gamma_1, \dots, \gamma_n) + x_0(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis: durch Einsetzen:

$$L^{(n)}\bar{x}(t) = \underbrace{L^{(n)}x(t)}_0 + \underbrace{L^{(n)}x_0(t)}_{h(t)} = h(t)$$

$\Rightarrow \bar{x}(t)$ ist Lösung

$\bar{x}(t)$ ist auch die allgemeine Lösung, da es von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ abhängt.

q.e.d.

Beispiel

Stokes-Fall

$$\underbrace{\dot{v}}_L = \underbrace{-g}_{\text{inhomogen}} - \frac{\xi}{m} \underbrace{v}_L$$

homogen: $g = 0$

$$\Rightarrow v(t) = C e^{-\xi/m t}$$

[C Integrationskonstante

Inhomogen: spezielle Lösung?

Steady state: Lösung:

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow v(t) = -v_\infty = -\frac{mg}{\xi}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$v(t) = Ce^{-\xi/m t} - v_\infty$$

$$t = 0 \Rightarrow v_0 = C - v_\infty \Rightarrow \boxed{v(t) = (v_0 + v_\infty)e^{-\xi/m t} - v_\infty}$$

Das gleiche Ergebnis haben wir oben mit Separation der Variablen berechnet. Hier folgt es viel einfacher aus dem Satz über die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen ODE. Der Raum der Lösungen wird also von den Funktionen 1 und e^{-t} aufgespannt. Mit der Wronski-Determinante kann man leicht prüfen, dass diese beide wirklich linear unabhängig sind.

Damit ergibt sich folgendes Rezept:

1. n linear unabhängige Lösungen finden für die homogene Gleichung
2. eine spezielle Lösung für die inhomogene Dgl.
3. die Summe bilden, damit ist das Problem gelöst

Konstante Koeffizienten

In der Klassischen Mechanik hat man es oft mit linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu tun, zB mit dem harmonischen Oszillator mit Dämpfung und äußerer Kraft:

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = h(t)$$

Homogener Fall

Im homogenen Fall ($h(t) = 0$) verwendet man den Exponentialansatz: $x = x_0e^{rt}$

$$\Rightarrow a_2x_0e^{rt}r^2 + a_1x_0e^{rt}r + a_0x_0e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow x_0e^{rt} \underbrace{(a_2r^2 + a_1r + a_0)}_0 = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung für } r$$

$$\Rightarrow r_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Allgemeine Lösung:

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} & \text{für } r_1 \neq r_2 \\ c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t} & \text{für } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Achtung: negative Diskriminante möglich, die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind dann komplex.

Inhomogener Fall

Spezielle Lösungen beim inhomogenen Fall ($h(t) \neq 0$) bekommt man immer über eine *Variation der Konstanten*:

$$x_s(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

Die resultierende Differentialgleichungen für die $C_i(t)$ sind oft sehr kompliziert. Einfache Spezialfälle:

1) $h(t) = \text{const.}$ (z.Bsp. Stokes)	$\Rightarrow x_s = \frac{h}{a_0}$ Steady State
2) $h(t) = a + bt + ct^2$	$\Rightarrow x_s = A + Bt + Ct^2$
3) $h(t) = Ae^{\lambda t}$	$\Rightarrow x_s = Ce^{\lambda t}$
4) $h(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$	$\Rightarrow x_s = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

3.3 Mathematischer Einschub 6: Komplexe Zahlen

Die imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$ bildet die Grundlage, um die komplexen Zahlen zu definieren. Eine komplexe Zahl z ist von der folgenden Form

$$z = x + i y$$

In der komplexen Zahlenebene werden Real- und Imaginärteil senkrecht zueinander aufgetragen, eine komplexe Zahl kann dann als Vektor mit Betrag und Winkel interpretiert werden. Für den Betrag von z gilt:

$$r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Für den Winkel (auch Argument oder Phase genannt) gilt:

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

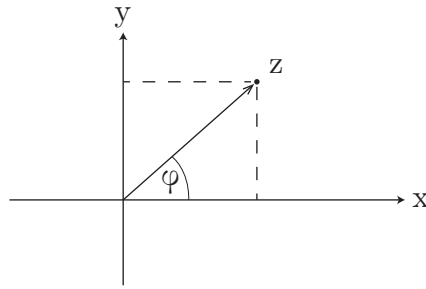


Abbildung 3.6: Vektorinterpretation in der komplexen Zahlenebene

Mit der Taylorreihe ergibt sich folgende Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
 e^{i\varphi} &= 1 + (i\varphi) + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{6}(i\varphi)^3 + \dots \\
 &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{6}i\varphi^3 + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots\right) \\
 &= \boxed{\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}}
 \end{aligned}$$

Obige Gleichung ist nach dem Mathematiker LEONHARD EULER benannt und heißt deshalb auch **Eulersche Formel**. Setzt man in dieser $\varphi = \pi$, so ergibt sich ein schöner Zusammenhang (auch *Eulersche Identität* genannt) zwischen den fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik, also $0, 1, \pi, e, i$:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Durch

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

und der Eulerschen Formel erhält man die **Polardarstellung** einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z = r e^{i\varphi}}$$

Für die komplex konjugierte Zahl $z^* = x - iy$ ergibt sich die Polardarstellung:

$$\begin{aligned}
 z^* &= x - iy \\
 &= r \cos \varphi - i r \sin \varphi \\
 &= r \cos(-\varphi) + i r \sin(-\varphi) \\
 &= r e^{-i\varphi}
 \end{aligned}$$

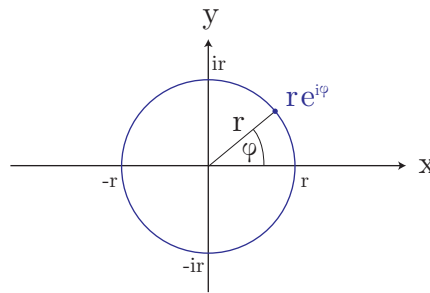


Abbildung 3.7: Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten

Die Beträge stimmen also überein, aber die Winkel sind gegensätzlich.

$$z z^* = r e^{i\varphi} r e^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2$$

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{e^{i\varphi} e^{-i\varphi}} = 1 \quad \text{diese Zahlen liegen auf dem Einheitskreis}$$

Aus

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

folgt

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Umkehrung der} \\ \text{Euler-Formel} \end{array}$$

Vergleiche die analogen Formeln im Reellen für Kosinus und Sinus Hyperbolicus:

$$\cosh \varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = \cos(i\varphi)$$

$$\sinh \varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) = -i \sin(i\varphi)$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re} e^{i(\alpha + \beta)} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ &= \operatorname{Re} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Analog kann auch für den Sinus verfahren werden. Es ergeben sich so auf einfache Weise die bekannten Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

3.4 Der harmonische Oszillator

Grundgleichung

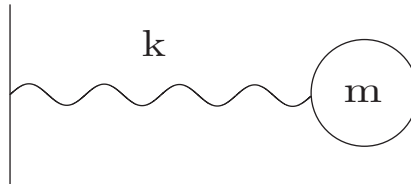


Abbildung 3.8: Harmonischer Oszillator: eine Masse m wird durch eine Feder mit Federkonstante k gehalten.

Die Masse erfährt eine lineare Rückstellkraft F , die der Auslenkung x proportional ist. Es gilt das Hooke'sche Gesetz (genannt nach ROBERT HOOKE, einem Zeitgenossen von Newton, der das Mikroskop erfunden und damit als erster Mensch Zellen beobachtet hat, aber auch wichtige Beiträge zur Mechanik geleistet hat):

$$F = -k x$$

Die Federkonstante k hat somit die Einheit: $[k] = \frac{N}{m}$.

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Dgl. ist linear, homogen und hat konstante Koeffizienten.

$$\Rightarrow \text{Exponentialansatz: } x = Ae^{\alpha t} \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{charakteristische Gleichung: } \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm i \omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}} \quad \text{allg. Lösung}$$

Man beachte: $x(t)$ muss reell sein! Wir fordern also $x = x^*$:

$$A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} = x = x^* = A_+^* e^{-i\omega_0 t} + A_-^* e^{i\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow A_+ = A_-^*, \quad A_- = A_+^* \Rightarrow A_+ = a + ib, \quad A_- = a - ib$$

Es gibt also nur zwei unabhängige Parameter a und b , wie es bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auch sein muss.

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)} \quad A = -2b, \quad B = 2a$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen ergibt sich $B = x(0)$ und $A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}$. Die allg. Lösung ist in dieser Darstellung die Überlagerung von zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz, aber verschiedenen Amplituden. Sie kann aber umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2}}_{A_0} \left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\cos \alpha} \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\sin \alpha} \cos(\omega_0 t) \right) \\ &= A_0 (\cos \alpha \sin(\omega_0 t) + \sin \alpha \cos(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme ergibt sich:

$$\boxed{x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)}$$

Die allg. Lösung ist also *eine* Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0 , Phasenverschiebung α und Amplitude A_0 .

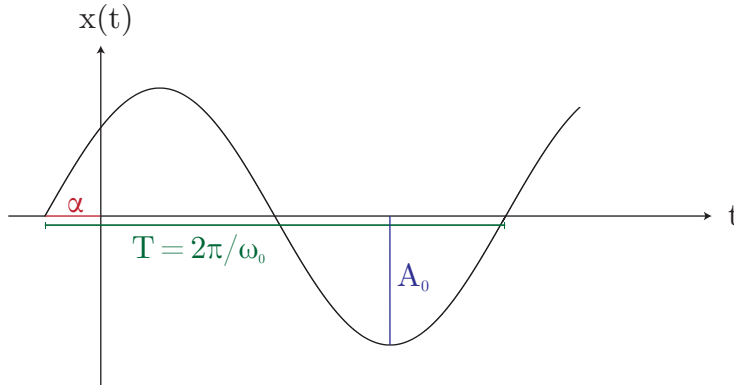


Abbildung 3.9: Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators ist eine reine Schwingung.

Der harmonische Oszillator ist nicht nur für die Mechanik sehr wichtig, er kommt zum Beispiel auch in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik vor.

Beispiel

elektrischer Schwingkreis

$$U_L = L\dot{I}, \quad U_C = \frac{Q}{C}$$

Nach KIRCHHOFF ist die Summe der Spannungen 0, d.h. $U_L + U_C = 0$.

$$\Rightarrow L\dot{I} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \left[I \text{ elektr. Strom} = \dot{Q} \right]$$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

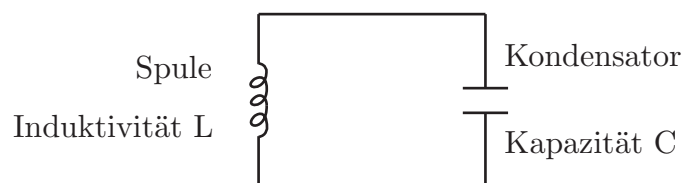


Abbildung 3.10: Veranschaulichung zum elektrischen Schwingkreis

Gedämpfter harmonischer Oszillator

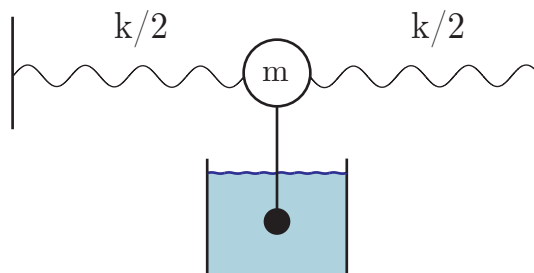


Abbildung 3.11: Möglicher Aufbau für einen gedämpften harmonischen Oszillator

Wir erweitern den harmonischen Oszillator um einen Reibungsterm (ähnlich der Stokes'schen Reibung bei den Fallgesetzen):

$$m\ddot{x} = -kx - \xi\dot{x}$$

$$\beta = \frac{\xi}{2m} \quad \text{Dämpfung}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\Rightarrow \text{Exponentialansatz: } x = ae^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow x = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Es können also **drei Fälle** eintreten:

$$\beta^2 < \omega_0^2 \quad \text{schwache Dämpfung}$$

$$\beta^2 = \omega_0^2 \quad \text{kritische Dämpfung}$$

$$\beta^2 > \omega_0^2 \quad \text{starke Dämpfung}$$

Beispiel

elektrischer Schwingkreis mit Widerstand

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$$

$$R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

Die verschiedenen Fälle werden wir nun genauer betrachten.

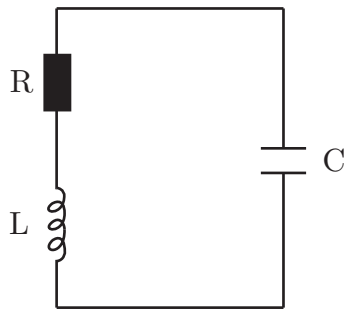


Abbildung 3.12: Der elektrische Schwingkreis mit Widerstand ist gedämpft.

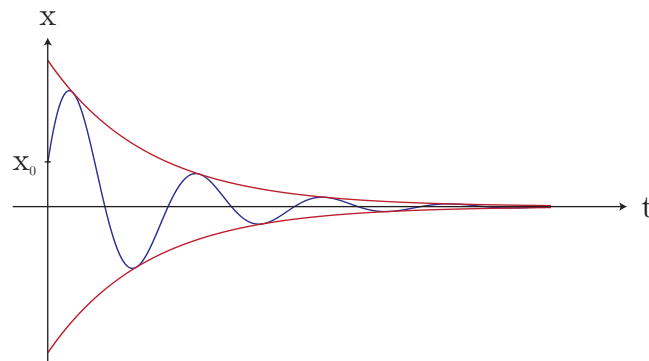


Abbildung 3.13: Schwache Dämpfung: exponentielle Dämpfung der Amplitude.

1. Schwache Dämpfung

$$\beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\beta \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Dämpfung der Amplitude}} \underbrace{(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t})}_{\text{Schwingung mit Frequenz } \omega < \omega_0}$$

Mit den Anfangsbedingungen erhält man:

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t} \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)}$$

Das System schwingt mit Frequenz $\omega < \omega_0$ und die Amplitude ist exponentiell gedämpft.

2. Kritische Dämpfung

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = 0$$

⇒ nur eine Lösung $\lambda = -\beta$ für die charakteristische Gleichung

⇒ Fall $r_1 = r_2$ im ME Differentialgleichungen

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t}(x_0 + (v_0 + \beta x_0)t)}$$

Dies entspricht dem Limes $\omega \rightarrow 0$ im Fall 1 ($\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$). Alternativ kann

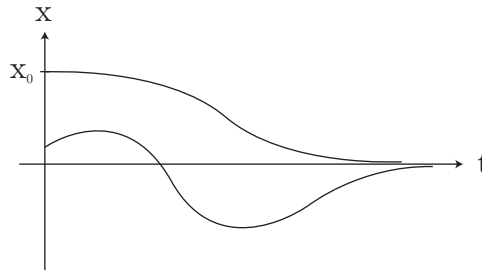


Abbildung 3.14: Kritische Dämpfung: aperiodischer Grenzfall.

man diese Lösung im Sinne des mathematischen Einschubs verstehen als den Fall, in dem die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung entartet sind. Es gibt keine Schwingung mehr, höchstens einen Nulldurchgang bei entsprechenden Anfangsbedingungen (*aperiodischer Grenzfall*).

3. Starke Dämpfung

$$\beta > \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\beta \pm \gamma \quad 0 < \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\beta t}(a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t})}$$

Es liegt also ein rein exponentieller Abfall ohne Schwingung vor (*Kriechfall*).

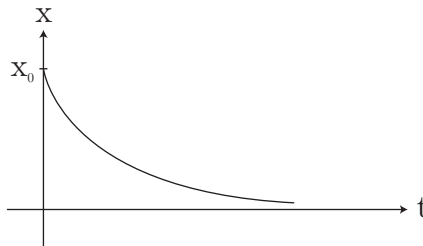


Abbildung 3.15: Starke Dämpfung: Kriechfall.

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

Die Abbildungen 3.13, 3.14, 3.15 kann man mit Wolfram Mathematica generieren. Dazu kann man folgenden Code benutzen:

```

1  omega0 := 2
2  beta := .5
3  s = NDSolve[{x''[t] + 2*beta*x'[t] + omega0^2*x[t] == 0, x
4  [0]== 0, x'[0] == 1}, x, {t, 0, 30}]
   Plot[Evaluate[{x[t]} /. s], {t, 0, 30}, PlotRange -> All]
```

In diesem Code benutzt man eine numerische Methode, die sogenannte Runge-Kutta Methods verwendet, um die Differentialgleichung zu lösen.

Getriebener harmonischer Oszillator

Mechanisches System: das System wird von außen mit Frequenz ω getrieben

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

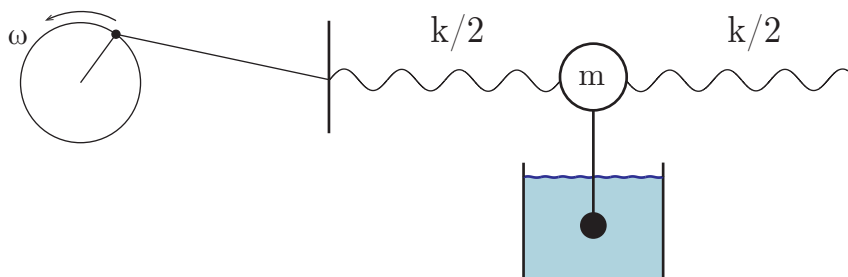


Abbildung 3.16: Getriebener harmonischer Oszillator

Beispiel

Realisierung als elektrischer Schaltkreis: $U = U_0 \sin \omega t$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = U_0 \omega \cos \omega t$$

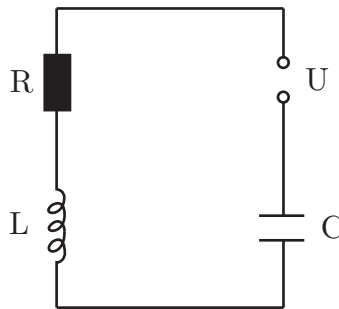


Abbildung 3.17: Der elektrische Schaltkreis für den getriebenen harmonischen Oszillator enthält eine Wechselspannung.

Um die Differentialgleichung für den getriebenen harmonischen Oszillator mit einem Exponentialansatz lösen zu können, setzen wir die Lösung einfach ins Komplexe fort:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Als reelle Lösung nehmen wir dann $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$.

Die allgemeine Lösung ist nach dem ME Differentialgleichungen die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_0(t)$$

$x_{\text{hom}}(t)$ entspricht $F_0 = 0 \Rightarrow$ gedämpfter harmonischer Oszillator $\Rightarrow$ Lösung zerfällt in der Zeit $\Rightarrow$ *Einschwingvorgang*. $x_0(t)$ dominiert also nach dem Einschwingen $\Rightarrow$ wir suchen nur nach dieser Lösung. Mit dem Exponentialansatz $z(t) = Ae^{i\omega t} = |A| e^{i\varphi} e^{i\omega t}$ bekommen wir also für die reelle Lösung nach langer Zeit:

$$x(t) = x_0(t) = |A| \operatorname{Re} (e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

Wir benötigen also Betrag $|A|$ und Phase φ von A . Wir setzen den Exponentialansatz in die Differentialgleichung ein:

$$\underbrace{\left[A(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) - \frac{F_0}{m} \right]}_{=0} e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) - 2i\beta\omega} = -\frac{F_0}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow |A| = \sqrt{AA^*} = \frac{F_0}{m} \left(\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^2} \right)^{1/2}$$

$$|A| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$|A| \rightarrow \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} & \omega \rightarrow 0 \\ \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2} & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Im Limes $\beta \rightarrow 0$ kommt es zur *Resonanzkatastrophe* (im Englischen *resonance*

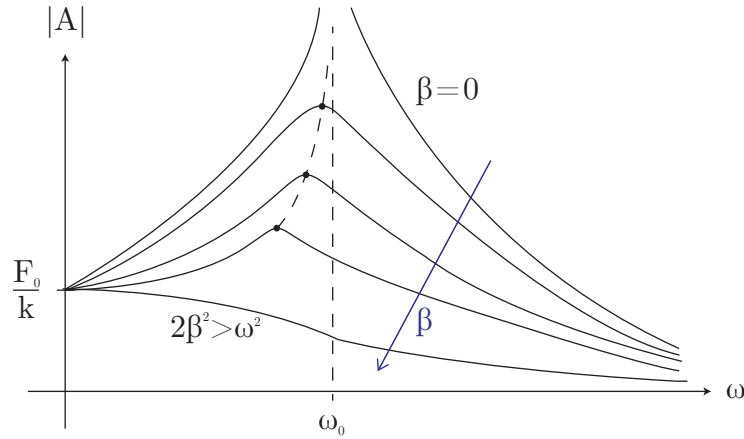


Abbildung 3.18: Amplitude des getriebenen harmonischen Oszillators.

disaster), wenn die treibende Frequenz der Eigenfrequenz entspricht. Dieses Phänomen wird in der Regel für große Schwingungen von Brücken verantwortlich gemacht, z.B. beim Einbruch der Brücke von Angers 1850, der Tacoma-Narrows-Brücke 1940 oder den Schwingungen der Milleniumsbrücke London 2000.

Nach der Amplitude betrachten wir noch die Phasenverschiebung:

$$\operatorname{Re} A = -\frac{m}{F_0} |A|^2 (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\operatorname{Im} A = -2 \frac{m}{F_0} |A|^2 \beta \omega < 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}$$

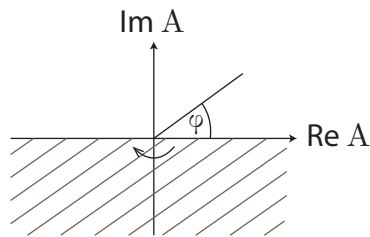


Abbildung 3.19: Da der Realteil negativ ist, hinkt die Schwingung der Anregung hinterher.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 > \varphi > -\pi \\ \Rightarrow \text{Schwingung hinkt hinterher} \\ \omega = \omega_0 \Rightarrow \operatorname{Re} A = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

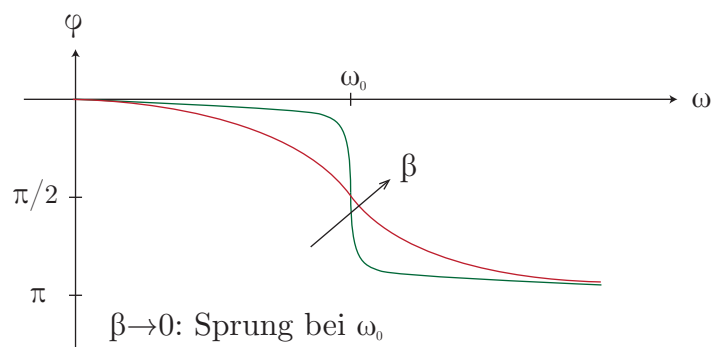


Abbildung 3.20: Je kleiner die Dämpfung, desto sprunghafter die Phasenverschiebung.

Hier kann man die Differentialgleichung auch mit Wolfram Mathematica lösen:

```

1  beta := 0.1
2  A := 1
3  omega := 0.5
4  s1 = NDSolve[{x''[t] + 2*beta*x'[t] + x[t] == A*Cos[omega*t],
x[0] == 0, x'[0] == 1}, x, {t, 0, 100}]
5  p1 := Plot[Evaluate[{x[t]} /. s1], {t, 0, 100}, PlotRange ->
All]; Show[p1]
```

Phasenraum

$$m\ddot{x} = -kx$$

Verdoppeln der Variablen:

$$v = \dot{x}, \quad \ddot{x} = \dot{v} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Die (x, v) - Ebene ist der *Phasenraum* für den harmonischen Oszillator (in diesem Fall handelt es sich also um eine *Phasenebene*). $(\dot{x}, \dot{v})$ ist das Vektorfeld, dass den Fluss des Systems durch den Phasenraum beschreibt. Das resultierende Flussdiagramm heißt *Phasenportrait*. Der harmonische Oszillator hat geschlossene

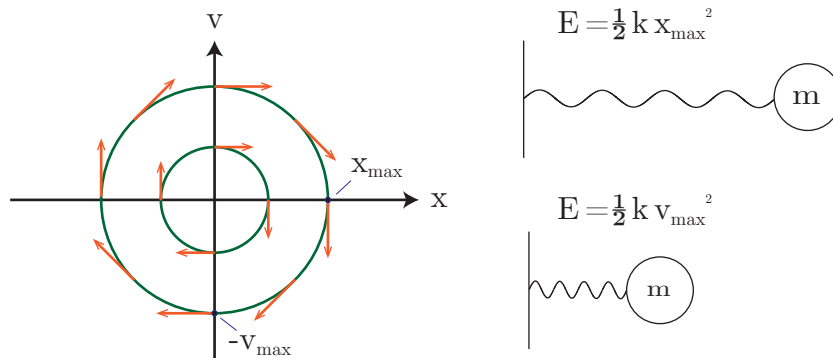


Abbildung 3.21: Phasenportrait für den harmonischen Oszillator

Trajektorien, die Ellipsen sind. Ellipseneigenschaft:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{dx}{dv} = \frac{v}{-\omega_0^2 x}$$

$$\xRightarrow[\text{der Variablen}]{\text{Separation}} -\omega_0^2 x dx = v dv \Rightarrow \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} v^2 = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \text{const} = E$$

Die Energie E ist eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{1}{2} k x^2 \quad \text{Federenergie}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

Mathematisch ist das genau die Ellipsengleichung. Mit Wolfram Mathematica kann man den Phasenraum genauer anschauen, dazu hilft diese Code:

```
1 VectorPlot[{v, -x}, {x, -10, 10}, {v, -10, 10}] (*omega=1*)
```

Da der harmonische Oszillator linear ist, hat er keine ausgezeichnete Amplitude, diese wird durch die Anfangsbedingung gesetzt, ändert sich dann aber nicht mehr. Kleine Störungen bleiben klein, aber sie verschwinden auch nicht mehr. Bei technischen Anwendungen möchte man jedoch oft eine ausgezeichnete und robuste Amplitude implementieren. Dafür benötigt man deshalb *nicht-lineare Oszillatoren*.

Einfachster Fall: *van der Pol Oszillator*

$$\ddot{x} + \underbrace{\mu(x^2 - 1)}_{\text{neuer Term}} \dot{x} + x = 0$$

$|x| = 1 \Rightarrow$ harmonischer Oszillator

$|x| > 1 \Rightarrow$ positive Dämpfung

$|x| < 1 \Rightarrow$ negative Dämpfung

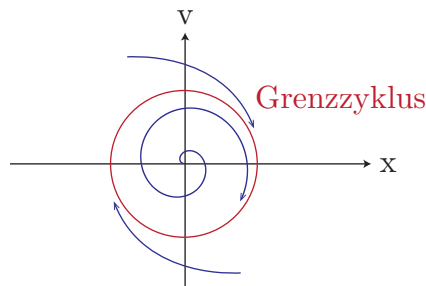


Abbildung 3.22: Phasenportrait des van der Pol Oszillators für kleines μ . Alle Trajektorien enden im gleichen Grenzzyklus, d.h. die Amplitude ist für alle Anfangsbedingungen gleich.

Beispiel

Tetrode-Schaltung von van der Pol

$$U = \frac{I^3}{3} - I \text{ mit geeigneten Einheiten}$$

$$L\ddot{I} + U'(I)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \text{ Dgl. für van der Pol Oszillator}$$

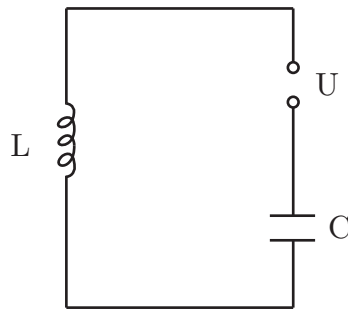


Abbildung 3.23: Die Schaltung von van der Pol mit einer passenden nicht-linearen Spannungsquelle.

Man kann den Phasenraum der van der Pol Oszillator mit dem folgenden Wolfram Mathematica Code anschauen:

```
1 StreamPlot[{v, -x - m*(x*x - 1)*v}, {x, -4, 4}, {v, -4, 4}]
2 VectorPlot[{v, -x - m*(x*x - 1)*v}, {x, -4, 4}, {v, -4, 4}]
```

Fadenpendel

Polarkoordinaten: die Gewichtskraft kann in Radial- und Winkelanteile zerlegt werden:

$$\mathbf{F}_G = F_r \hat{\mathbf{e}}_r + F_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$F_r = mg \cos \varphi$$

$$F_\varphi = -mg \sin \varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m[a_r \hat{\mathbf{e}}_r + a_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi] &= m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\mathbf{e}}_\varphi] \\ &= (F_r + F_F)\hat{\mathbf{e}}_r + F_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad [F_F \text{ Fadenspannung}] \end{aligned}$$

Die Fadenspannung ist das erste Beispiel für eine *Zwangskraft*, die garantiert, dass eine bestimmte Randbedingung eingehalten wird. Hier ist das die konstante Fadenlänge.

$$r = l = \text{konst.} \Rightarrow \ddot{r} = \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow F_F = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi$$

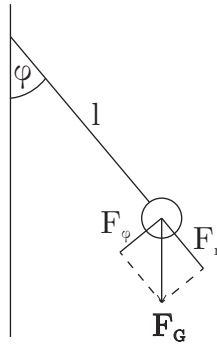


Abbildung 3.24:

Für die Lösung benötigen wir die Fadenspannung nicht explizit, wir können sie hinterher falls gewünscht ausrechnen. Wirklich relevant ist hier nur die φ - Richtung:

$$\begin{aligned}
 ml\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi \\
 \Rightarrow l\ddot{\varphi} &= -g \sin \varphi \quad (\text{hier geht träge = schwere Masse ein}) \\
 \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0} & \quad \text{nicht-lineare ODE}
 \end{aligned}$$

Näherung kleiner Winkel: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Wir erhalten also wieder den harmonischen Oszillator. Aus Dimensionsgründen konnte man schon erraten, was die Eigenfrequenz sein muss. Diese hängt also nur von der Fadenlänge und nicht von der Masse ab. Dies ist der einfachste Nachweis dass träge = schwere Masse gilt.

4 Mehrteilchensysteme

4.1 Motivation

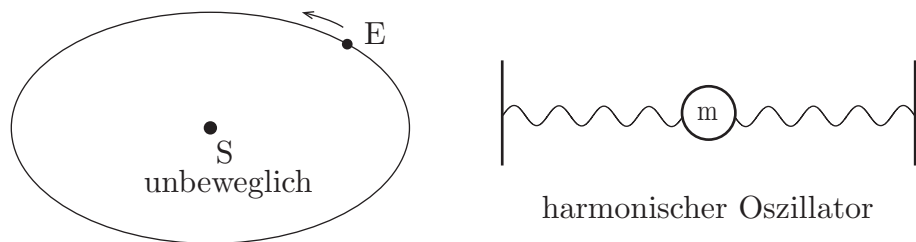


Abbildung 4.1: Die zwei wichtigsten Beispiele für Einteilchensysteme: Planetenbewegung um eine unbewegliche Sonne und der harmonische Oszillator.

Bisher haben wir in der Vorlesung nur Einteilchensysteme behandelt. Das war zum Beispiel die Bewegung der Erde um eine unbewegliche Sonne oder der harmonische Oszillator. Jetzt wenden wir uns den Mehrteilchensystemen zu. Zunächst werden verschiedene Mehrteilchensysteme vorgestellt:

a) **2-Körper-Probleme in der Astronomie**

Darunter versteht man das Problem der Berechnung der Bewegung zweier astronomischer Objekte, die sich aufgrund der Gravitation anziehen (z.Bsp. Doppelstern, Erde/Mond, Erde/Komet, Erde/Sonne). Dieses sog. *Kepler-Problem* wurde von Newton gelöst. Bei mehr als zwei Objekten erfolgt die Berechnung mittels Störungstheorie oder Numerik.

b) **Systeme mit sehr vielen Teilchen**

Bei Systemen mit sehr vielen Teilchen ($N \gg 1$) (z.B. ein makroskopisches Volumen Gas mit $N = 6 \times 10^{23}$ Teilchen) sind exakte Ergebnisse über die Bewegung einzelner Teilchen weder möglich noch sinnvoll. In der *Statistischen Mechanik* werden deshalb Aussagen erarbeitet, die für Ensembles gelten (insbesondere Mittelwerte und typische Abweichungen davon). Die relevanten

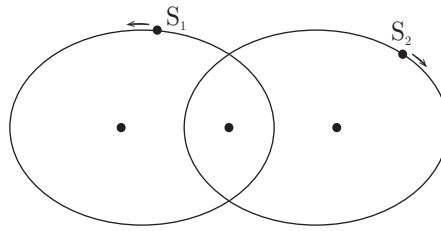


Abbildung 4.2: Beispiel für ein 2-Körper-Problem: beim Doppelstern sind die beiden Massen relativ ähnlich. Newton hat gezeigt dass sich auch für zwei Körper beide Massenpunkte auf Ellipsen bewegen.

Potentiale können dabei sehr unterschiedlich sein, sind aber in der Regel konservative Zentralkräfte.

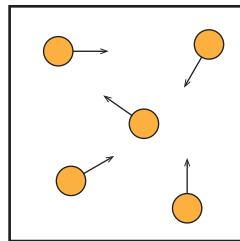


Abbildung 4.3: Die Statistische Mechanik beschäftigt sich mit Systemen mit sehr vielen Teilchen Teilchenbewegung, wie zum Beispiel einem Behälter mit Gas.

c) Federsysteme

Systeme von Massenpunkte, die durch Federn gekoppelt sind, kommen oft in technischen Anwendungen vor, sind aber auch Modelle für die *Molekülphysik* und die *molekulare Biophysik*. Das einfachste Beispiel ist die lineare Kette mit $N = 2$. Bei kleinen Auslenkungen ($\sin \varphi \approx \varphi$) ist die Bewegung des gekoppelten Pendels dazu äquivalent. Die lineare Kette mit $N = 3$ ist ein Modell für Kohlendioxid CO_2 .

d) Doppelpendel (N=2)

Schon das Doppelpendel kann zu scheinbar erratischen Bewegungen führen, die im Prinzip berechenbar sind, aber empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängen (*deterministisches Chaos*). Die chaotische Bewegung des Doppelpendels wird in der *Nichtlinearen Dynamik* behandelt.

Um einen Eindruck von der nichtlinearen Dynamik zu bekommen, kann man ein wenig mit der Simulation des Doppelpendels spielen:

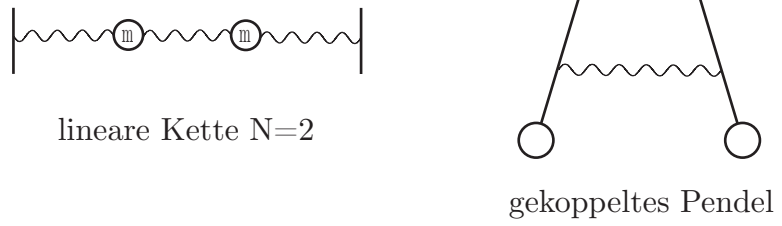


Abbildung 4.4: Das gekoppelte Pendel ist für kleine Auslenkungen äquivalent zur linearen Kette mit $N = 2$.

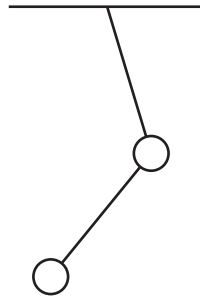


Abbildung 4.5: Das Doppelpendel hat eine chaotische Bewegung, die in der Nicht-linearen Dynamik untersucht wird.

```

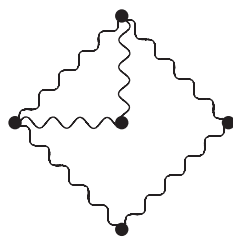
1 deqns = {Subscript[m, 1] x1''[t] == (\Lambda)1[t]/Subscript[1
    , 1]) x1[t] - (\Lambda)2[t]/Subscript[1, 2]) (x2[t] - x1[t
    ]), Subscript[m, 1] y1''[t] == (\Lambda)1[t]/Subscript[
    1,1]) y1[t] - (\Lambda)2[t]/Subscript[1, 2]) (y2[t] - y1[
    t]) - Subscript[m, 1] g, Subscript[m, 2] x2''[t] == (\
    Lambda)2[t]/Subscript[1, 2]) (x2[t] - x1[t]), Subscript
    [m, 2] y2''[t] == (\Lambda)2[t]/Subscript[1, 2]) (y2[t] -
    y1[t]) - Subscript[m, 2] g};
2
3 aeqns = {x1[t]^2 + y1[t]^2 == Subscript[1, 1]^2, (x2[t] - x1[
    t])^2 + (y2[t] - y1[t])^2 == Subscript[1, 2]^2};
4 ics = {x1[0] == 1, y1[0] == 0, y1'[0] == 0, x2[0] == 1, y2[0]
    == -1, y2'[0] == 0};
5
6 params = {g -> 9.81, Subscript[m, 1] -> 1, Subscript[m, 2] ->
    1, Subscript[1, 1] -> 1, Subscript[1, 2] -> 1};
7
8 soldp = First[NDSolve[{deqns, aeqns, ics} /. params, {x1, y1,
    x2, y2, \Lambda1, \Lambda2}, {t, 0, 15}, Method -> {"
    IndexReduction" -> {"Pantelides", "ConstraintMethod" ->
    "Projection"}}]];
9
10 Animate[Graphics[{{PointSize[.025], {Red, Point[{x1[t], y1[t]
    
```

```
]]]], {Blue, Point[{x2[t], y2[t]}]}, Line[{{0, 0}, {x1[t],
y1[t]}, {x2[t], y2[t]}]} /. soldp, {Gray, Line[Map[
Function[Evaluate[{x2[#], y2[#]} /. soldp]], Range[0, t,
0.025]]]]}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 0}}, Axes -> True,
Ticks -> False, ImageSize -> 500], {t, 0, 10, .025},
SaveDefinitions -> True]
```

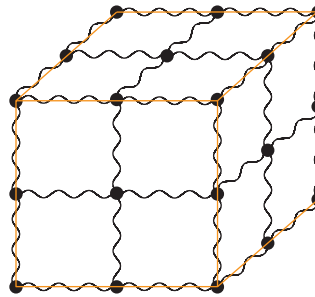
11

e) Federsysteme mit vielen Teilchen

Modellsysteme wie der harmonische Kristall sind Thema der *Festkörperphysik*.



Modell für Moleküle



harmonischer Kristall

Abbildung 4.6: Federsysteme sind auch Modelle für Moleküle und Festkörper.

4.2 Notation

Wir betrachten ein System mit N Teilchen (z.Bsp.: Planetensystem, Molekül, Festkörper, Gas). Jedem Teilchen ordnen wir einen Index i zu ($1 \leq i \leq N$). Dies darf nicht verwechselt werden mit (x_1, x_2, x_3) für die Koordinaten. Die Koordinaten des i -ten Teilchen bezeichnen wir deshalb ab jetzt mit (x_i, y_i, z_i) . Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- $\mathbf{r}_i$: Ortsvektor des i -ten Teilchens
- m_i : Masse des i -ten Teilchens
- $\mathbf{F}_i$: Gesamtkraft auf das i -te Teilchen
- $\mathbf{F}_{ij}$: Kraft des j -ten Teilchens auf das i -te Teilchen

Die auf das i -te Teilchen wirkende Gesamtkraft $\mathbf{F}_i$ ist dann:

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{ext}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}}$$

Ein System heißt *abgeschlossen*, wenn es keine äußeren Kräfte gibt, also $\mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0}$.

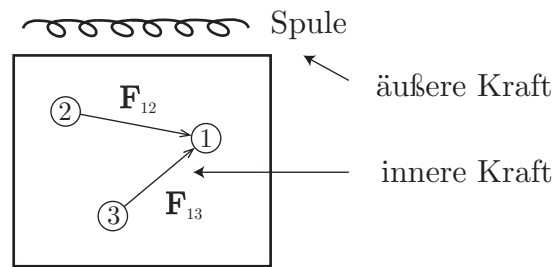


Abbildung 4.7: Auf Teilchen 1 wirken die inneren Kräfte von Teilchen 2 und 3 sowie äußere Kräfte, z.B. elektromagnetische Feldkräfte.

Anwendung des zweiten Newton'schen Gesetzes und des Superpositionsprinzips auf einen Massenpunkt liefert:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}$$

Das ist ein System von $3N$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn die Teilchen außerdem Ausdehnung haben, dann gibt es insgesamt $6N$ Freiheitsgrade (also nochmals so viele für die Orientierungen).

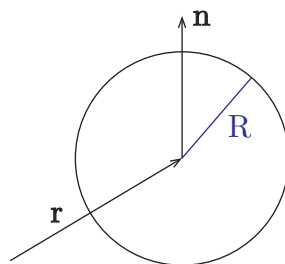


Abbildung 4.8: Teilchen mit Ausdehnung: neben dem Ortsvektor benötigen wir noch Winkel für die Orientierung.

Das dritte Newton'sche Gesetz (*actio = reactio*) besagt für die inneren Kräfte:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \Rightarrow \mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{F}_{ii} \Rightarrow \mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$$

In der Newton'schen Mechanik kann also ein Teilchen keine Kraft aus sich selbst ausüben. Die Summe über die inneren Kräfte hat effektiv nur $N - 1$ Terme.

Beispiel

Sonnensystem: Sonne, acht Planeten (*Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unsere Nachbarplaneten*), deren Monde, Asteroiden, etc.

$$\mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\gamma m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

4.3 Erhaltungssätze

Impuls

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} \right) \stackrel{3. \text{Gesetz}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{0}$$

Mit dem 2. Gesetz folgt dann:

$$\Rightarrow \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \quad (1)$$

Der Beitrag der inneren Kräfte fällt weg.

Definitionen

$$\mathbf{F}^{ext} := \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \quad \text{Gesamtkraft}$$

$$M := \sum_i m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad \text{Schwerpunkt}$$

Mit diesen Definitionen lässt sich (1) kompakt schreiben:

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext}}$$

Schwerpunktsatz: Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle Masse in ihm

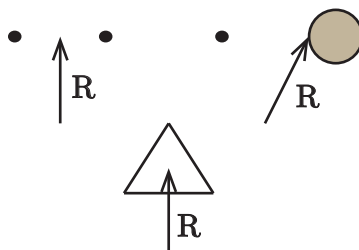


Abbildung 4.9: Schwerpunktsvektor für zwei gleich große Massen, zwei unterschiedliche Massen und eine kontinuierliche Massenverteilung in der Form eines Dreiecks.

vereint wäre und die äußere Gesamtkraft auf ihn wirkte. Die inneren Kräfte spielen hier keine Rolle. Im abgeschlossenen System ($\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}$) bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig.

Definition:

$$\mathbf{P} := \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{Gesamtimpuls}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext}}$$

Für ein abgeschlossenes System ergibt sich damit die Impulserhaltung:

$$\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$$

Drehimpuls

Wir definieren den Gesamtdrehimpuls als Summe der Einzeldrehimpulse:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} &= \sum_i m_i [(\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) + (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i)] = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}) + \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) \end{aligned}$$

Für Zentralkräfte ($\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$) verschwindet der zweite Term:

$$\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji})] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

Damit folgt der Drehimpulssatz:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{L}} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}) =: \mathbf{M}^{ext}} \quad [\mathbf{M}^{ext} \text{ Gesamtdrehmoment}]$$

Für ein abgeschlossenes System gilt Drehimpulserhaltung:

$$\mathbf{M}^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$$

Der Gesamtimpuls $\mathbf{L}$ kann zerlegt werden in Schwerpunktsanteil $\mathbf{L}_s$ und Relativanteil $\mathbf{L}_r$. Wir definieren Relativkoordinaten für jeden Massenpunkt i :

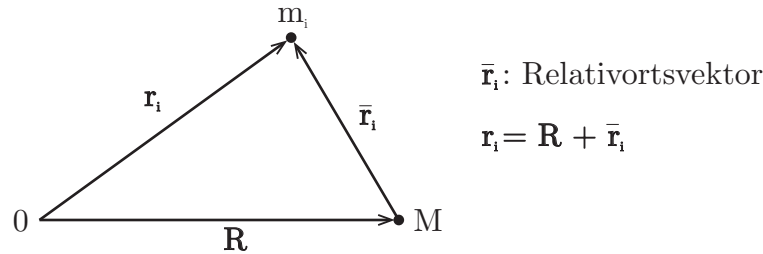


Abbildung 4.10: Definition von Relativkoordinaten

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \bar{\mathbf{r}}_i$$

Wegen

$$\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

ergibt sich für die Zerlegung des Gesamtimpulses:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{L} &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i m_i [(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{r}}_i) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)] \\ &= \sum_i m_i [(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + (\mathbf{R} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) + (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{R}}) + (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)] \\ &= \underbrace{M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})}_{\mathbf{L}_s} + \underbrace{(\mathbf{R} \times (\sum_i m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i))}_{=0} + \underbrace{((\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i) \times \dot{\mathbf{R}})}_{=0} + \underbrace{\sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)}_{\mathbf{L}_r} \end{aligned}$$

In kompakter Schreibweise:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_r &= \sum_i m_i(\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)\end{aligned}$$

Vergleich mit dem Impuls:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_i}_{=0}) = M\dot{\mathbf{R}}$$

Der Gesamtimpuls hat nur einen Schwerpunktsanteil.

Energie

Zunächst multiplizieren die Bewegungsgleichung eines einzelnen Massenpunktes skalar mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und summieren anschließend über i . Es ergibt sich:

$$\sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right)}_{=T \text{ kinetische Energie}} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

Wir unterscheiden zwischen konservativen und dissipativen Kräften:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + \mathbf{F}_i^{dis} \quad \left[\nabla_i \text{ Gradient für das } i\text{-te Teilchen} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \sum_i (\nabla_i V) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_i \mathbf{F}_i^{dis} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i} \quad \text{Energiesatz}$$

Im Falle eines konservativen Systems folgt:

$$T + V = E = \text{const.} \quad \text{Die Gesamtenergie ist erhalten.}$$

Definitionen:

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad z_{ij} = z_i - z_j$$

$$\nabla_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)$$

Typischerweise haben wir für die inneren Kräfte konservative Zentralkräfte, d.h. es gibt Zwei-Körper-Potentiale, die nur vom Betrag des Abstandes abhängen:

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{ij}) \quad \text{mit } r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{F}_{ij} &= -\nabla_i V_{ij} = -\nabla_{ij} V_{ij} = +\nabla_{ji} V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = \nabla_j V_{ji} \\ \Rightarrow V_{ij} &= V_{ji}, \quad V_{ii} = 0 \quad (\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

Die Matrix der Zwei-Körper-Potentiale ist also symmetrisch und hat eine verschwindende Diagonale (da die Einträge gerade den $\mathbf{F}_{ii}$ entsprechen). Für die Energieerhaltung bezüglich der inneren Kräfte haben wir dann:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \text{skalp} F_{ij} \dot{r}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-\nabla_{ij} V_{ij}) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V_{ij} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass auch die externe Kraft konservativ ist:

$$\Rightarrow \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\nabla_i V_i^{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = -\nabla V^{\text{ext}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad \text{mit } V^{\text{ext}} = \sum_i V_i^{\text{ext}}$$

Damit haben wir:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i V_i^{\text{ext}}$$

Für das Gesamtpotential folgt also:

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}_{\text{Gesamtpotential}} = \underbrace{\sum_i V_i^{\text{ext}}(\mathbf{r}_i)}_{V^{\text{ext}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} V_{ij}}_{\sum_{i<j} V_{ij}}}$$

Dieses Ergebnis macht Sinn, jedes Paarpotential kommt effektiv nur einmal vor.

Virial

Wie groß sind die relativen Beträge von kinetischer und potentieller Energie zur Gesamtenergie? Diese Frage kann für das zeitliche Mittel beantwortet werden!

Wir betrachten im folgenden nur konservative Kräfte. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung skalar mit $\mathbf{r}_i$ und summieren auf:

$$\Rightarrow \sum_i m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i)}_{\text{verschwindet idR im zeitl. Mittel}} - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}_{=2T}$$

Der zeitliche Mittelwert einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &:= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \\ \Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) \right\rangle &= \frac{1}{\tau} \underbrace{\left[\sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) \right]_0^\tau}_{(*)} \rightarrow 0 \quad (\text{wenn } (*) \text{ endlich}) \end{aligned}$$

Dies ist z.Bsp. der Fall bei gebundener Bewegung (Planeten, Federn) aber nicht bei Streuung.

$$\Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\sum_i (\nabla_i V \cdot \mathbf{r}_i)}_{\text{Virial}} \right\rangle} \quad \textbf{Virialsatz}$$

Die kinetische Energie ist im zeitlichen Mittel gleich dem halben Virial.
Spezialfall: *homogene* Potentiale vom Grad k

$$V(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_N) = \alpha^k V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} V(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_N) &= k \alpha^{k-1} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{\partial V}{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)} \cdot \frac{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial(\alpha \mathbf{r}_i)} \cdot \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

$$\stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} kV = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2} k \langle V \rangle} \quad \text{Virialsatz für homogene Potentiale}$$

Beispiele

1. Federn

$$V_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} r_{ij}^2$$

$$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow \langle T \rangle = \langle V \rangle$$

Es ist genau gleich viel Energie in kinetischer und potentieller Energie gespeichert. Das gilt insbesondere für Moleküle oder Festkörper.

2. Gravitation

$$V_{ij} = -\gamma m_i m_j \frac{1}{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow 2\langle T \rangle = -\langle V \rangle = -(E - \langle T \rangle)$$

$$\Rightarrow \langle T \rangle = -E \quad (E < 0 \text{ wegen gebundener Bewegung})$$

$$\langle V \rangle = 2E \Rightarrow |\langle V \rangle| = 2|\langle T \rangle|$$

Es ist zweimal so viel Energie in potentieller Energie gespeichert wie in kinetischer Energie.

Sätze für Mehrteilchensysteme

Impuls

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext}$$

Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{P}}_{\mathbf{L}_s} + \underbrace{\sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i)}_{\mathbf{L}_r}$$

Energie

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_i \mathbf{F}_i^{dis} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

Potential

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \underbrace{\sum_i V_i^{ext}(\mathbf{r}_i)}_{V^{ext}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} V_{ij}}_{\sum_{i<j} V_{ij}}$$

4.4 Zwei-Teilchen-Systeme

Wir werden uns im folgenden als Spezialfall der Mehrteilchensysteme den Zwei-Teilchen-Systeme ($N=2$) zuwenden. Wir definieren **Schwerpunkts-** und **Rela-**

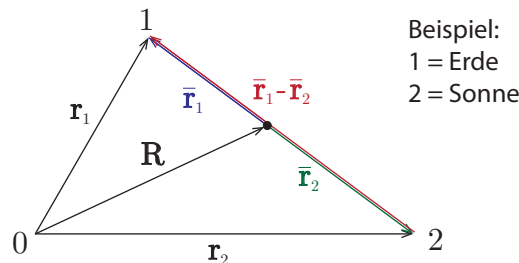


Abbildung 4.11: Ortsvektoren im Zwei-Teilchen-System, Definition von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Relativkoordinaten:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \underbrace{\frac{m_2}{M}}_{\bar{\mathbf{r}}_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \underbrace{\frac{m_1}{M}}_{\bar{\mathbf{r}}_2} \mathbf{r}$$

Zur Positionsbeschreibung der Massenpunkte sind $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ also äquivalent. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{R}$ und $\mathbf{r}$?

Schwerpunktsatz für abgeschlossene Systeme:

$$\boxed{M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}}$$

Relativbewegung:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{=:\frac{1}{\mu}} \mathbf{F}_{12}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{reduzierte Masse}$$

In einem abgeschlossenen System gilt also für den Relativvektor:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

Die zwei Bewegungsgleichungen sind also entkoppelt und man erhält effektiv ein Ein-Teilchen-System. Die Erhaltungssätze sind demnach wie in Kapitel 2 (*Dynamik des Massenpunktes*).

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}})^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2}_{T_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2}_{T_r} \quad (\text{gemischte Terme heben sich auf}) \end{aligned}$$

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_r &= \sum_{i=1,2} m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i) = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$V = V_r = V_{12}$$

Theorem (Bertrand)

Stabile, geschlossene Bahnkurven gibt es nur für die Potentiale $-\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{1}{2}kr^2$.

Definition: Systeme, die sich durch Erhaltungssätze auf eindimensionale Integrale reduzieren lassen, heißen *vollständig integrabel*. Das gilt für das Zwei-, aber nicht für das Drei-Körper-Problem.

4.5 Kepler-Problem

Zwei-Körper-Problem mit der Gravitationskraft als wirkende Kraft zwischen den zwei Massenpunkten.

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_{12}(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V_{12} = -\nabla_{12} V_{12} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\gamma \mu M \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Es handelt sich also effektiv um *ein* Teilchen der Masse μ im Gravitationspotential von M , das sich mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ um den Ursprung bewegt. Man führt demnach eine Ein-Teilchen-Rechnung durch und erhält Kegelschnitte (Ellipsen für $E < 0$, Hyperbeln für $E > 0$) als Lösung der Differentialgleichung. Wir interessieren uns hier erst einmal für gebundene Bahnen, also Ellipsen. Wenn der Vektor $\mathbf{r}$ auf einer Ellipse läuft, dann gilt das auch für die beiden Relativvektoren $\bar{\mathbf{r}}_1$ und $\bar{\mathbf{r}}_2$ im Schwerpunktsystem. Im Schwerpunktsystem laufen also beide Massen gleich-

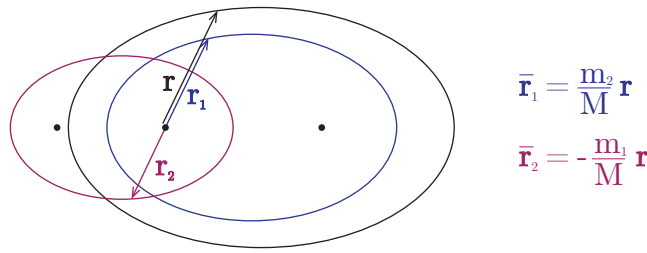


Abbildung 4.12: Im Schwerpunktsystem laufen beide Ortsvektoren gleichsinnig auf Ellipsen.

sinnig auf Ellipsen. Für die Halbachsen der Ellipsen in Abhängigkeit der Massen folgt aus der Ein-Teilchen-Rechnung:

$$a_1 = -\gamma \frac{\mu m_2}{2E_r}, \quad a_2 = -\gamma \frac{\mu m_1}{2E_r} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

D.h. je größer die Masse, desto kleiner die Halbachse. Das Verhältnis der Massen von Sonne und Erde ist: $\frac{m_S}{m_E} = 3,33 \cdot 10^5$. Mit der Halbachse der Erde $a_E = 1 \text{ AE}$ (Astronomische Einheit) $= 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ergibt sich für die Halbachse der Sonne:

$$a_S = \frac{m_E}{m_S} a_E = \frac{1 \text{ AE}}{3,33 \cdot 10^5} = 500 \text{ km}$$

4.6 Zwei-Teilchen-Streuung

Zwei Massenpunkte bewegen sich aufeinander zu, wechselwirken für eine begrenzte Zeit und laufen wieder voneinander weg. Dieser Vorgang wird als *Streuung* oder *Stoß* bezeichnet. Streuexperimente sind zentral für die Atom-, Molekül-, Kern- und Elementarteilchenphysik, da sie es erlauben, aus den experimentellen Daten

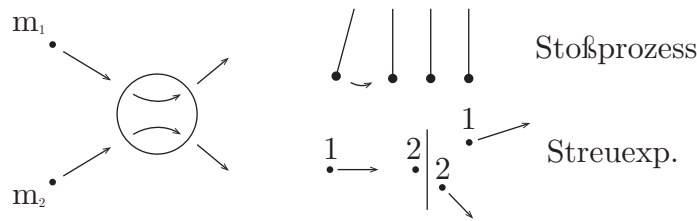


Abbildung 4.13: Bei der Zwei-Teilchen-Streuung sind die Bahnkurven ungebunden, wechselwirken aber in einem zentralen Bereich.

auf das Wechselwirkungspotential zu schließen (das ist ein Beispiel für ein *inverse Problem*, wobei das direkte Problem die Berechnung der Streuung aus dem Potential ist). Man muss zwei verschiedene Bezugssysteme unterscheiden:

a) **Laborsystem** Σ_L

Hier wird das Experiment gemacht. Wir verwenden für die Koordinaten im Laborsystem die Bezeichnung: $\mathbf{r}_i$

b) **Schwerpunktsystem** Σ_S

Das Schwerpunktsystem ist theoretisch einfacher zu handhaben (wenn abgeschlossen). Die Koordinaten kennzeichnen wir mit: $\bar{\mathbf{r}}_i$, $\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$

Das vollständige Problem kann nur in Kenntnis des Potentials gelöst werden. Allerdings können im allgemeinen Fall schon aus Impuls- und Energieerhaltung weitreichende Folgerungen gezogen werden (*Impulsanalyse*).

Impulserhaltung

$$\Sigma_L : \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \text{const.}$$

Das kommt daher, dass es keine äußeren Kräfte gibt. Dies sind drei Bestimmungsgleichungen für die sechs Unbekannte.

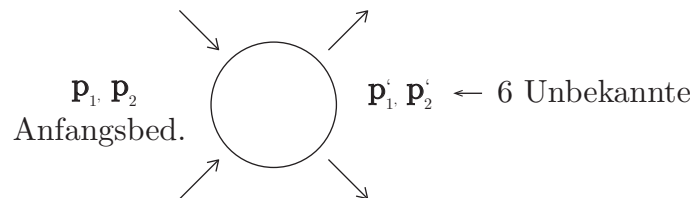


Abbildung 4.14: Die Zwei-Teilchen-Streuung hat sechs Unbekannte.

$$\Sigma_S : \quad \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}}'_1 + \bar{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{0}$$

Da der Schwerpunkt hier ruht, heben sich die Impulse gerade auf. Das heißt:

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{p}}_1 = -\bar{\mathbf{p}}_2, \quad \bar{\mathbf{p}}'_1 = -\bar{\mathbf{p}}'_2$$

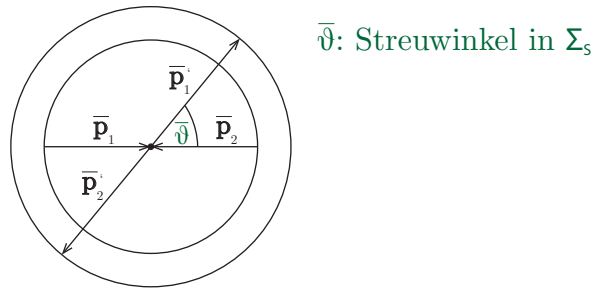


Abbildung 4.15: Einlaufende und auslaufende Impulse im Schwerpunktsystem heben sich jeweils auf.

Energieerhaltung

$$\Sigma_L : \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{p}_i'^2}{2m_i} (+Q) \quad [Q \text{ Energieübertrag bei } \textit{inelastischer Streuung}]$$

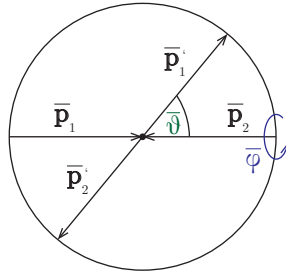
In unserem Fall ist $Q = 0$, denn wir gehen von elastischer Streuung aus (Energieerhaltung bei konservativen Kräften, keine zusätzlichen Freiheitsgrade wie An- oder Abregung der Teilchen).

$$\Sigma_S : \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{\mathbf{p}}_i'^2}{2m_i} (+\bar{Q}) \quad (\text{ohne Beweis: } Q = \bar{Q})$$

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{\bar{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} \stackrel{\text{Impulssatz}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{\mathbf{p}}_i^2 \quad (i = 1 \text{ oder } i = 2) \\ &= \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_i'^2}{2\mu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\bar{\mathbf{p}}'_i| = |\bar{\mathbf{p}}_i|$$

Die Energieerhaltung legt also noch die Beträge fest. Da hier nochmals der Impulssatz verwendet wurde, ist das nur eine zusätzliche Bestimmungsgleichung, es



Alle Vektoren auf der gleichen Kugelschale, aber zwei unbekannte Winkel

$\bar{\vartheta}$: Streuwinkel in Σ_s

$\bar{\varphi}$: Azimutalwinkel

Abbildung 4.16: Aufgrund der Energieerhaltung sind die Beträge der Impulsvektoren vor und nach der Streuung gleich.

bleiben also noch zwei Unbekannte, nämlich zwei Winkel. Davon ist aber bei rotationssymmetrischen Potentialen nur einer relevant, nämlich der Streuwinkel, der im Folgenden eine zentrale Rolle spielen wird.

Wir machen jetzt noch die zusätzliche Annahme, dass Teilchen 2 (das *Target*) vor dem Stoß ruht ($\mathbf{r}_2 = 0$). Demnach geht der Gesamtimpuls von Teilchen 1 aus, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}$, und der anfängliche Impuls von Teilchen 2 ist der Nullvektor, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Für die Impulse nach dem Stoß gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_1 &= m_1(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1) = \frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1 \\ \mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}_1 + \underbrace{\mathbf{p}_2}_{=0} - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \left(\frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1\right) = \frac{m_2}{M}\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{p}}'_1\end{aligned}$$

Somit legt $\bar{\mathbf{p}}'_1$ die beiden Endimpulse fest.

$$\text{Energieerhaltung : } |\bar{\mathbf{p}}'_1| = |\bar{\mathbf{p}}_1| = \left| m_1(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{R}}) \right| = \left| \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{p}_1 \right| = \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1|$$

Impulsanalyse

Die Ergebnisse der Impulsanalyse mit einem ruhenden Target können in einem Vektordiagramm zusammengefasst werden. Aus diesem Diagramm kann man auch den Zusammenhang der Streuwinkel in Schwerpunkt und Laborsystem berechnen. Wir definieren die Längen x und y und lesen folgende Winkelverhältnisse ab:

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{y}{|\bar{\mathbf{p}}'_1|}$$

$$\cos \bar{\vartheta} = \frac{x}{|\bar{\mathbf{p}}'_1|}$$

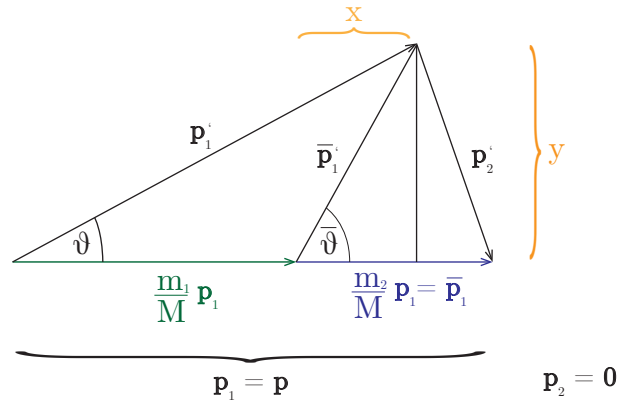


Abbildung 4.17: Für ein ruhendes Target liegen alle Impulsvektoren in einer Ebene und bilden ein einfaches Vektordiagramm.

Damit folgt:

$$\tan \vartheta = \frac{y}{x + \frac{m_1}{M} |\mathbf{p}_1|} = \frac{\sin \bar{\vartheta}}{\cos \bar{\vartheta} + \gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{m_1 |\mathbf{p}_1|}{M |\bar{\mathbf{p}}'_1|} = \frac{m_1}{M} \frac{|\mathbf{p}_1|}{\frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1|} = \frac{m_1}{m_2}$$

Die Beziehung zwischen ϑ und $\bar{\vartheta}$ wird also nur durch das Massenverhältnis bestimmt. Das Massenverhältnis führt auch zu starken Einschränkungen auf die möglichen Streuwinkel:

- $\gamma > 1$ der linke Punkt liegt außerhalb des durch $\bar{\mathbf{p}}'_1$ definierten Kreises (also so wie in der Skizze), Streuung nur in Vorwärtsrichtung, es gibt einen maximalen Streuwinkel.
- $\gamma < 1$ der linke Punkt liegt innerhalb des durch $\bar{\mathbf{p}}'_1$ definierten Kreises, alle Streuwinkel möglich.
- $\gamma = 1$ der linke Punkt liegt genau auf dem durch $\bar{\mathbf{p}}'_1$ definierten Kreis, der Satz von Thales besagt dann, dass die Teilchen im Laborsystem im rechten Winkel voneinander wegfliegen (diese Aussage macht nur Sinn, wenn die Impulse nicht verschwinden, was zum Beispiel beim Zentralstoß auf ein ruhendes Target mit Impulsaustausch nicht mehr gilt). Ein Spezialfall ist der Zentralstoß, also $\vartheta = \pi$. Dann degeneriert das Dreieck zu einem Strich und man sieht, dass die zwei Massen genau den Impuls tauschen. Das ist die Basis von einem Fadenpendel mit mehreren Kugeln, das gerne als Einrichtungsgegenstand verwendet wird.

Streuung am $1/r$ -Potential

Zur vollständigen Lösung muss ein bestimmtes Potential betrachtet werden. Wir betrachten dies jetzt für das Gravitations-/Coulomb-Potential, $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Die Bahnen sind also Kegelschnitte.

$$\text{Anfangsgeschwindigkeit } v \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu v^2 > 0$$

Es gibt also keine gebundenen Zustände und die Bahnkurve ist nicht eine Ellipse, sondern eine Hyperbel. Wir betrachten wieder $\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ (ruhesendes Target) und die Relativkoordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Der *Stoßparameter* b ist der Abstand, um den das einfallende Teilchen das Target verfehlen würde, wenn es keine Streuung gebe. Die

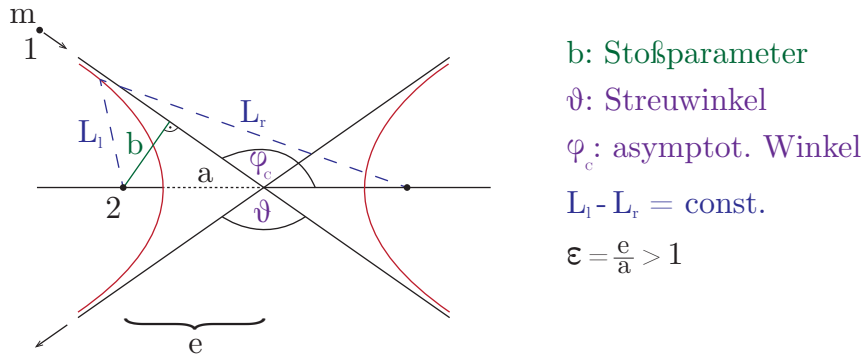


Abbildung 4.18: Die Zwei-Teilchen-Streuung mit Gravitationspotential ergibt Hyperbelbahnen.

Bahn des Massenpunktes wird beschrieben durch:

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } \epsilon = \frac{e}{a} > 1 \text{ (Exzentrizität)}$$

Die Exzentrizität ist größer als 1 aufgrund der positiven Energie:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 \mu}} > 1$$

Im Grenzfall $r = \infty$ folgt der kritische (asymptotische) Winkel:

$$\varphi_C = \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Dieser ist mit dem Streuwinkel verbunden durch:

$$\vartheta + \pi = 2\varphi_C$$

Der Drehimpuls folgt aus dem Stoßparameter, $L = \mu bv$. Damit folgt:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2(\mu bv)^2 \frac{1}{2} \mu v^2}{\alpha^2 \mu}} = \sqrt{1 + \frac{(b \mu v^2)^2}{\alpha^2}} \quad (1)$$

Für den Streuwinkel haben wir:

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin(\varphi_C - \frac{\pi}{2}) = -\cos \varphi_C = \frac{1}{\varepsilon}$$

Einsetzen in (1) und Auflösen nach b ergibt:

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2(\frac{\vartheta}{2})} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{(\mu v^2)^2}$$

Somit haben wir einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel und dem Stoßparameter gefunden. Kleine Stoßparameter entsprechen großen Streuwinkeln und umgekehrt. Aber selbst für sehr kleine Stoßparameter gibt es noch einen Streuwinkel, weil das Potential langreichweitig ist.

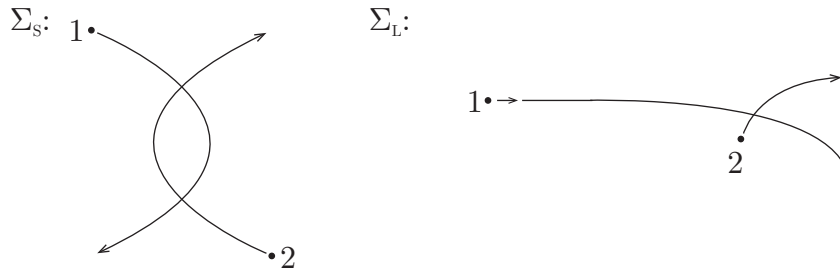


Abbildung 4.19: Hyperbelbahn der Streuung in Schwerpunkt- und Laborsystem.

Streuquerschnitt

Der Zusammenhang zwischen Streuwinkel und dem Stoßparameter als Funktion des Potentials erlaubt es, aus den experimentellen Streuwinkeln auf die Potentiale zurückzuschließen. Experimentell werden in der Regel sogenannte *Streuquerschnitte* gemessen. Typischerweise hat man eine homogene Verteilung über den Strahl, d.h. die Stoßparameter sind nur entsprechend der Geometrie des Strahls verteilt. Deshalb skalieren alle Teilchenzahlen proportional zum eingeschossenen Teilchenfluss, also der Zahl der Teilchen, die pro Zeit und pro Querschnittsfläche eingeschossen werden, und alles kann auf ein Teilchen normiert werden. Zur

Beschreibung des eingeschossenen Strahls sind zwei-dimensionale Polarkoordinaten angemessen. Nach dem Stoß fliegen die Teilchen in alle Richtungen weg, d.h. hier sind die drei-dimensionalen Kugelkoordinaten angemessen, aber davon benötigen wir nur die Winkelanteile. Wenn der Strahl in z-Richtung eingeschossen wird, dann ist der Streuwinkel gerade der Polarwinkel ϑ der Kugelkoordinaten. Die andere Winkelkoordinate hat keinen physikalischen Effekt.

Jetzt muss man Größen definieren, die wiedergeben, wie der ebene Strahl in eine kugelförmige Verteilung aufgefächert wird. Wir nehmen ein rotationssymmetrisches Potential an, d.h. es gibt nur einen relevanten Winkel, nämlich den Streuwinkel ϑ , der wiederum eindeutig aus dem Stoßparameter b folgt. Allerdings messen wir die gestreuten Teilchen nicht im ganzen Ring, der zu einem Streuwinkel gehört, sondern nur in einem bestimmten Raumwinkel $d\Omega$ (also dem Raumkegel, der vom Detektor abgedeckt wird).

Definition Streuquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\text{\#Teilchen die pro Zeit in Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{\#Teilchen die pro Zeit und Fläche einfallen}}$$

Wegen des eindeutigen Zusammenhangs zum Stoßparameter gilt (Vorzeichen werden weggelassen, im Prinzip gibt es hier ein Minuszeichen, weil b mit ϑ abnimmt, aber die physikalischen Größen müssen alle positiv sein):

$$\begin{aligned} d\sigma &\stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} b db d\varphi = b \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta d\varphi \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \\ d\Omega &\stackrel{\text{Kugelkoord.}}{=} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= b \frac{db}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{1}{2} \frac{db^2}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} = \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v^4} \frac{\cos(\frac{\vartheta}{2})}{\sin^3(\frac{\vartheta}{2})} \frac{1}{\sin \vartheta} \end{aligned}$$

Wegen

$$\sin \vartheta = \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

folgt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}} \quad \text{Differentieller Streuquerschnitt}$$

Coulomb-Streuung von Elektronen an Kern mit Kernladungszahl Z

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{16E^2} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{Rutherford'sche Streuformel}$$

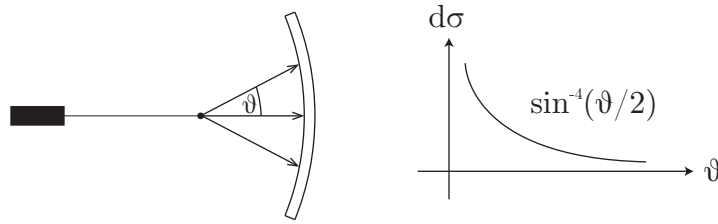


Abbildung 4.20: Im typischen experimentellen Aufbau misst ein Detektor mit endlichem Raumwinkel alle Streuwinkel aus. Für die Coulomb-Streuung fällt der differentielle Streuquerschnitt mit dem Winkel stark ab (Rutherford'sche Streuformel).

Interpretation: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hat die Dimension einer Fläche. Ein Teilchen, das durch diese Fläche tritt, wird in den gegebenen Streuwinkel gestreut. Je größer $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, desto stärker ist die Streuung (für diesen Streuwinkel). Eine Integration führt auf den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (4.1)$$

Der totale Streuquerschnitt divergiert für das $1/r$ -Potential, weil diese Wechselwirkung langreichweitig ist, d.h. ein Teilchen wird immer gestreut.

4.7 Lineare Schwingungen

Viele mechanische Systeme haben einen stabilen Grundzustand, um den sie kleine Schwingungen ausführen. Im Sinne einer Taylorreihe sind das dann lineare Schwingungen, die physikalisch einem Mehrteilchensysteme mit Massen und Federn entsprechen.

Denn das Potential um ein Minimum bei x_0 lässt sich approximieren als:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Also gilt in erster Näherung (eindimensional, $x_0 = 0$)

$$F = -\nabla V = -V''(x_0)x = -kx$$

was genau der Fall des harmonischen Oszillators ist. In der Molekül- und Festkörperphysik ist V oft das Morse-Potential.

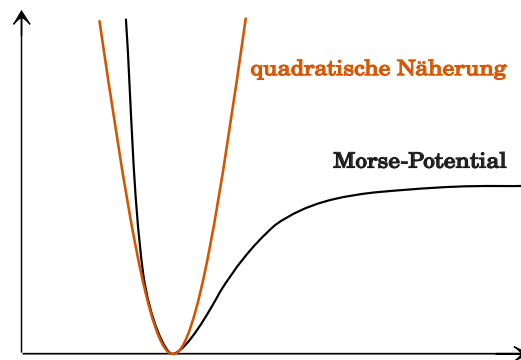


Abbildung 4.21: Näherung des Morse-Potentials.

Die Linearisierung von mechanischen Systemen ist ein sehr gut verstandenes Vorgehen. In der Molekülphysik werden so Moleküle wie Kohlendioxid modelliert; in der Biophysik werden damit große Biomoleküle modelliert. In der Festkörperphysik werden damit Kristalle beschrieben und z.B. die Schallausbreitung in Festkörpern beschrieben. Als *Schwingungslehre* sind die Theorie linearer Schwingungen auch ein wichtiger Teil der Ausbildung von Ingenieuren. Lineare Schwingungen treten nicht nur in mechanischen, sondern auch in elektronischen Systemen auf. Die mathematische Behandlung ähnelt der des harmonischen Oszillators, aber jetzt müssen wir in höheren Dimensionen arbeiten.

Beispiele

1. Zwei gekoppelte Massen (Linearisierung zweier gekoppelter Fadenpendel)

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k_{12}(x_1 - x_2)$$

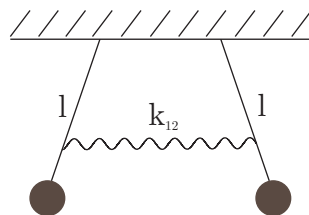


Abbildung 4.22: Zwei gekoppelte Fadenpendel.

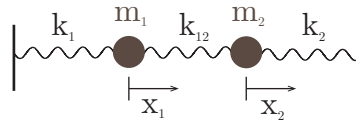


Abbildung 4.23: Linearisierung zweier gekoppelter Fadenpendel.

- 2.** Gekoppeltes Federpendel: dasselbe wie linearisiertes gekoppeltes Fadenpendel, aber mit $k_2 = 0$

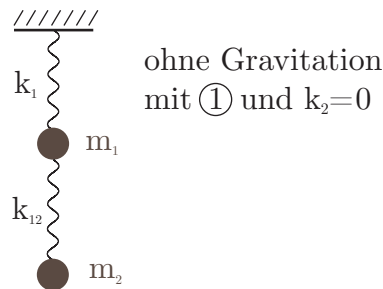


Abbildung 4.24: Gekoppelte Federpendel.

- 3.** Unendliche Kette, eindimensionaler Kristall

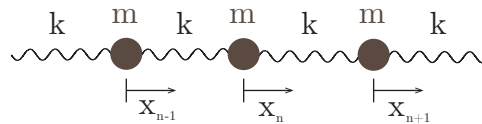


Abbildung 4.25: Die unendliche Kette ist das einfachste Modell für einen Kristall.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= k(x_{n+1} - x_n) + k(x_{n-1} - x_n) \\ &= k \underbrace{(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)}_{\text{diskretisierte 2. räumliche Abl.}} \end{aligned}$$

Dieses Modell führt auf die Wellengleichung $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ mit der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{ka^2/m}$, wobei $u(x, t)$ die Auslenkung ist und a der Abstand zwischen den Massen.

- 4.** Moleküle und Festkörper werden oft durch größere Anordnungen von Massen modelliert, die über Federn wechselwirken.

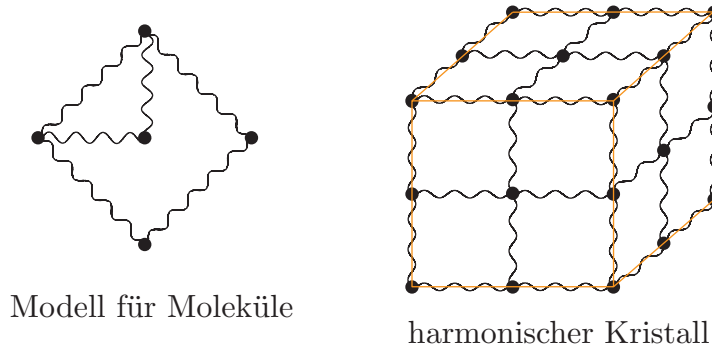


Abbildung 4.26: Modelle für Moleküle und Festkörper.

Alle diese Beispiele können rigoros als sogenannte Eigenwertprobleme nach Exponentialansatz gelöst werden. Wir formulieren das Problem erst sehr allgemein, aber spezialisieren dann sehr schnell auf das Beispiel der zwei linearisierten gekoppelten Federpendel. Zunächst führen wir die Zahl f der räumlichen Freiheitsgrade ein. Beim harmonischen Oszillator ist $f = 1$ und bei dem gekoppeltem Federpendel ist $f = 2$. Für den allgemeinen Fall schreiben wird dann

$$\sum_{j=1}^f M_{ij} \ddot{x}_j(t) + \sum_{j=1}^f K_{ij} x_j(t) = 0.$$

Das ist eine Verallgemeinerung von Newtons zweitem Gesetz für f Freiheitsgrade. Der erste Term beinhaltet die Massen, also die Trägheit im System, und der zweite die linearen Kräfte, die von harmonischen Potentialen stammen (keine Dämpfung, deshalb keine Ableitung erster Ordnung). In Matrixschreibweise lässt sich dies verkürzt darstellen:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \underline{\underline{K}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Man kann zeigen, dass im Fall der linearisierten Schwingungen um stabile Minima beide Matrizen symmetrisch und positiv definit sind. Jetzt machen wir einen Exponentialansatz wie beim harmonischen Oszillator:

$$x_i(t) = v_i e^{i\omega t} \text{ bzw. } \mathbf{x}(t) = \mathbf{v} e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

Mit dem Ansatz ergibt sich

$$(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}}\omega^2) \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Der Exponentialfaktor fällt also wie immer wieder raus und wir bekommen ein algebraisches Problem. Bei dieser Gleichung handelt es sich um ein sogenanntes Eigenwertproblem, d.h. man muss erst die Eigenwerte ω^2 bestimmen, die diese Gleichung lösen, und dann die zugehörigen Eigenvektoren (v_1, v_2) . Da die zwei Matrizen hier symmetrisch und positiv definit sind, kann man aus der linearen Algebra folgern, dass auch die Eigenwerte ω^2 reell und positiv sind und dass die Eigenvektoren reell gewählt werden können und eine Basis für den Lösungsraum aufspannen.

Wir nehmen jetzt das Beispiel der zwei gekoppelten Matrizen, mit $f = 2$. Dann haben die Matrizen folgende Form:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix}$$

und das Gleichungssystem lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

was diesem System aus zwei Gleichungen entspricht

$$\begin{aligned} -m_1\omega^2 v_1 &= -k_1 v_1 - k_{12}(v_1 - v_2) \\ -m_2\omega^2 v_2 &= -k_2 v_2 + k_{12}(v_1 - v_2). \end{aligned}$$

Auch ohne Kenntnis der Theorie der Eigenwerte ist klar, dass man hier einfach ein lineares Gleichungssystem lösen muss. Falls die sogenannte *Säkulärdeterminante* verschwindet, d.h. $\det = 0$, besitzt es eine nicht-triviale Lösung. Das entspricht einer quadratischen Gleichung für ω^2 , welche auf zwei *Eigenfrequenzen* $\omega_{\pm}^2$ führt. Durch Wurzelbildung bekommt man also insgesamt vier Frequenzen, was genau der Gesamtzahl an Freiheitsgraden entspricht (zwei räumliche Freiheitsgrade, zwei Impulsfreiheitsgrade). Diese Freiheitsgrade entsprechen den vier Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit jeder Masse). Zu jeder Eigenfrequenz gehört eine *Eigenmode* (Eigenvektoren (v_1, v_2)).

Wir diskutieren jetzt den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$ und berechnen die beiden Moden.

1.Mode

$$\omega_-^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gleichsinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder nicht belastet, das ist also eine triviale Mode.

2. Mode

$$\omega_+^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gegensinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder periodisch gedehnt und gestaucht. Die Frequenz dieser Mode ist höher.

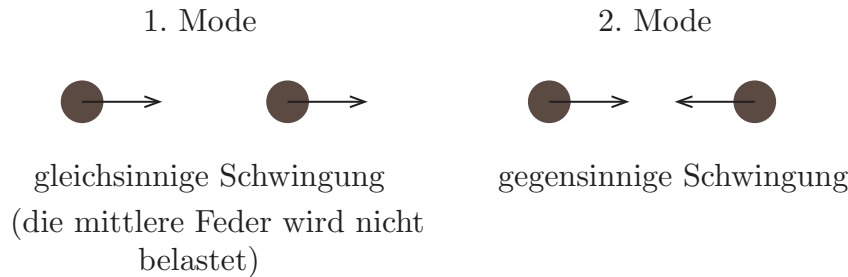


Abbildung 4.27: Ein System mit zwei Massenpunkten hat zwei räumliche Freiheitsgrade und deshalb zwei Fundamentalmoden.

Die allgemeine Lösung mit vier Parametern, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind, lautet:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) + a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ x_2(t) &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) - a_+ \cos(\omega_+ t) - b_+ \sin(\omega_+ t) \end{aligned}$$

Man kann die sogenannten Normalkoordinaten Q_1 und Q_2 definieren:

$$\begin{aligned} Q_1 &:= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \\ Q_2 &:= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \end{aligned}$$

Wegen $x_1 = Q_1 + Q_2$ und $x_2 = Q_1 - Q_2$ gilt:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ Q_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2} \end{aligned}$$

Die Normalkoordinaten sind interessant, weil sie wieder skalar sind. In den Normalkoordinaten ist das Problem in f unabhängige harmonische Oszillatoren entkoppelt.

Am Schluss betrachten wir einen wichtigen Spezialfall. Wir starten mit einer ausgelenkten Masse, die zweite Masse ist in der Ruheposition, und es gibt keine Geschwindigkeiten. Dann gilt $x_1(0) = A, x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Alle Sinus-Terme verschwinden und man hat

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A}{2} (\cos(\omega_- t) + \cos(\omega_+ t)) = A \left(\cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \right) \\ x_2(t) &= \frac{A}{2} (\cos(\omega_- t) - \cos(\omega_+ t)) = A \left(\sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \right) \end{aligned}$$

wobei für die Umformungen von Summen auf Produkte die Additionstheoreme genutzt wurden. Zum Beispiel kann man für den Fall x_1 die Gleichung $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ verwenden. Jetzt betrachtet man noch den Fall mit schwacher Kopplung ($k_{12} \ll k$). Dann kann man das Ergebnis interpretieren als eine Schwingung mit der Grundfrequenz $(\omega_+ + \omega_-)/2 \approx k/m$ der einzelnen Oszillatoren, aber mit einer Amplitude, die auch oszilliert, allerdings viel langsamer, nämlich mit $(\omega_+ - \omega_-)/2 \approx k_{12}/m$. Die modulierte Amplitude ähnelt dem Fall der Dämpfung im harmonischen Oszillator, aber hier ist sie nicht exponentiell abfallend, sondern oszilliert. Das heißt, dass die zwei Pendel abwechselnd sich bewegen und stillstehen, und dabei die Energie von einem auf das andere Pendel wechselt. Dieses wichtige Phänomen ist als *Schwebung* bekannt.